Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270362
Centre d'intérêt: 89

Lunkenbein, Dieter, 1937-

Didactique de la mathématique / par Dieter Lunkenbein ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1977.
vi, 163 p. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 16)

En tête du titre: Notes du séminaire Mat 4873 du programme de la maîtrise en enseignement à l'élémentaire (mathématique). Comprend des bibliographies. Dépouillement partiel: A propos du rôle des principes dans la didactique de la mathématique / par Erich Wittmann -- Une extension du principe opératoire / par Erich Wittmann -- La didactique de la mathématique en tant que "science d'ingénieur" / par Erich Wittmann -- Le concept de groupement de J. Piaget dans le processus de la rationalisation des interventions didactiques / par Dieter Lunkenbein.

Cote Dewey: 510.7/L963d Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Théorie de l'apprentissage *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean *Brunner, J. S. *Wittmann, Erich

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Méthode génétique *Théorie de l'équilibration *Approche piagétienne

---

Document de travail constitué de notes d'un séminaire de maîtrise en enseignement au primaire. Une première partie aborde la définition de la didactique des mathématiques, les divers aspects de la théorie et de la pratique de son enseignement, la philosophie de cet enseignement et la conception d'un modèle global d'enseignement. La deuxième partie présente les éléments d'une théorie de l'enseignement des mathématiques. Elle prend sa source, d'une part dans la théorie de l'équilibration de Jean Piaget, d'autre part dans la théorie de J. S. Brunner. La dernière partie traite des diverses méthodes de construction de séquences de situations d'apprentissage en mathématiques - la concrétisation de théories mathématiques, l'analyse d'objectifs, la méthode génétique - avant de privilégier cette dernière comme englobant les deux précédentes. Le tout est complété par la reproduction de quatre articles d'Erich Wittmann et de Dieter Lunkenbein.

Type de document: r
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270362

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Septembre 1977 Rapport no. 16

DIDACTIQUE DE LA MATHEMATIQUE

par

Dieter Lunkenbein

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques et d'informatique

E D U Q 8270362

SECTION ENSEIGNEMENT

Notes du séminaire Mat 4873
du programme de la
Maîtrise en enseignement à l'élémentaire
(mathématique)

Septembre 1977 Rapport no. 16

DIDACTIQUE DE LA MATHEMATIQUE

par

Dieter Lunkenbein

Document de travail
dans le cadre d'un projet de recherche
subventionné par le Programme F C A C
du Ministère de l'Education du Québec

Table des matières:

A) Aperçu général.

I. Introduction.

1. Qu'est-ce que la didactique de la mathématique ? 1

2. Théorie et pratique de l'enseignement. 8

3. Philosophie de l'enseignement de la mathématique. 9

4. Un modèle (global) d'enseignement. 12

II. Quelques éléments d'une théorie de l'enseignement de la mathématique.

1. L'oeuvre de J. Piaget. 20

1.1. La théorie de l'équilibration. 21

1.1.1. Les invariants fonctionnels de l'intelligence: l'organisation et l'adaptation. 21

1.1.2. Schèmes cognitifs. 24

1.1.3. Reformulation de la théorie de l'équilibration. 27

1.2. Conséquences de la psychologie de Piaget pour l'enseignement de la mathématique. 28

1.2.1. Le principe de l'orientation vers l'élève. 28

1.2.2. Le principe de l'intégration. 29

1.2.3. Le principe dynamique. 30

1.2.4. Le principe de redondance. 31

1.2.5. Le principe de stabilisation. 32

1.2.6. Le principe opératoire. 33

1.2.7. Quelques critères pour le choix d'exercices. 34

2. La théorie de J. S Bruner. 37

2.1. Importance de la structure. 38

2.2. Enseignement en spirale. 41

2.3. Principes reliés aux modes de représentation. 43

III. Méthodes de construction de séquences de situations d'apprentissage en mathématique.

1. La concrétisation de théories mathématiques. 47

2. L'analyse d'objectifs. 49

3. La méthode génétique. 54

3.1. Description. 54

3.2. Trois points de vue de la mathématisation. 55

3.3. Le principe génétique. 58

3.4. Les relations entre les trois méthodes de construction de séquences de situations d'apprentissage. 59

B) Quelques articles choisis.

I. E. WITTMANN,
A propos du rôle des principes dans la didactique de la mathématique. 61

II. E. WITTMANN,
Une extension du principe opératoire. 78

III. E. WITTMANN,
La didactique de la mathématique en tant que 108

"science d'ingénieur".

IV. D. LUNKENBEIN,

Le concept de groupement de J. Piaget dans le processus de la rationalisation des interventions didactiques. 128

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. WITTMANN, Grundfragen des Mathematikunterichts, Vieweg Braunschweig, 1975.

[2] J.S. BRUNER, The Process of Education, Harvard University Press, Cambridge, 1961.

[3] J.S. BRUNER, The Relevance of Education, W.W. Norton and Company Inc., New York, 1973.

[4] Z.D.M., Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, plus particulièrement: 74/3; Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

[5] J.H. FLAVELL, The Developmental Psychology of Jean Piaget, New York, 1963.

[6] A.Z. KRYGOWSKA, Le rôle de la didactique de la mathématique dans les études du futur enseignement. UQAM, 22 août 1973.

[7] H. FREUDENTHAL, Mathematics as an Educational Task, D. Reidel Publishing Company, Dortrecht, 1973.

[8] H.B. GRIFFITH, Mathematical Insight and Mathematical Curricula, Ed. Studies in Mathematics 4, 1971, 153-165.

[9] P. BRAUNFELD, B. KAUFMAN, Mathematics Education: A View-point, Int, J. Math. Educ. Sci. Technol. 3(1972), 287-289.

[10] H. FREUDENTHAL, The Concept of Integration at the Varna Congress, Educ. Studies in Mathematics, 1, 1969, 338-339.

[11] B. FORD, C.G. HALL, Model Building - an Educational Philosophy for Applied Mathematics, Int. J. Math, Ed. Sci. Technol. 1, 1970, 77-84.

[12] H. FREUDENTHAL, Why to teach mathematics so as to be useful, Ed. Studies in Mathematics 1, 1968, 3-8.

[13] J.S. BRUNER. Towards a Theory of Instruction, Cambridge / Mass., 196".

[14] D. WHITTAKER, Teaching of Mathematics in British Primary Schools, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 3, (1972), 5-15.

[15] A.Z. KRYGOSKA, Développement de l'activité mathématique des élèves et rôle des problèmes dans ce développement, L'enseignement mathématique 12, 1966, 293-320.

[16] Cambridge conference on School Mathematics: Goals for School Mathematics, Boston 1963.

[17] J.P. DE CECCO, The psychology of learning and instruction: Educational Psychology, New Jersey, 1968.

[18] Gouvernement du Québec, Ministère de l'Education, Guide Pédagogique, Mathématique à l'Elémentaire, Fascicule A, Description Générale du Programme Cadre, D.G.E.E.S., Québec, 1974.

[19] Gouvernement du Québec, Ministère de l'Education, Programme Cadre, La Mathématique à la classe maternelle et au niveau élémentaire, D.G.E.E.S., Québec, 1976.

[20] Gouvernement du Québec, Ministère de l'Education,
L'école, milieu de vie (2), Elémentaire,
D.G.E.E.S., Québec, 1975.

I Introduction

1. Qu'est-ce que la didactique de la mathématique?

Poser une telle question au début d'un séminaire sur la didactique de la mathématique peut donner l'impression que nous serons en mesure de donner une définition précise. - Loin de là! Même pour une science bien établie, il est difficile, sinon impossible, de donner une définition précise. Pour une science "in statu nascendi", comme la didactique de la mathématique, une telle question ne peut signifier qu'un défi à relever, celui d'essayer de faire cette science, de réfléchir sur ses activités. Nous espérons pouvoir approcher une réponse implicite à cette question.

Néanmoins, la discussion sur cette question est engagée depuis quelque temps et nous voulons commencer nos réflexions par la prise de connaissance de quelques essais de description qui pourront nous servir comme hypothèse de départ.

Voici trois citations d'auteurs différents:

a) H.G. BIGALKE dans [4].

"La didactique de la mathématique est la science (ou la science fondamentale) de l'apprentissage et de l'enseignement de la mathématique. Elle étudie les buts, les contenus et les conditions de l'enseignement de la mathématique. Ensuite, elle développe et expérimente des unités d'enseignement, y inclus tout matériel nécessaire, qui sont praticables, efficaces et convenables."

"Concernant son domaine et sa méthodologie, la didactique de la mathématique n'est ni une théorie méta-mathématique ni une application des sciences de l'éducation, de la psychologie ou de la sociologie. Elle est plutôt une science indépendante et interdisciplinaire entre la mathématique, les sciences de l'éducation, la psychologie, la sociologie et la philosophie."

b) H. GRIESEL dans [4] et [1] .

"La didactique de la mathématique est la science du développement de cours praticables pour l'apprentissage de la mathématique. Elle expérimente et elle évalue ces cours aux points de vue praticabilité, buts et contenus."

c) E. WITTMANN dans [4] .

"Présentement, la didactique de la mathématique ne semble être autre chose qu'un concept collecteur pour les contributions de toutes sortes à l'enseignement de la mathématique."

"Nous ne pouvons pas répondre" à la question "Qu'est-ce que la didactique de la mathématique?" parce que nous ne pouvons pas décider logiquement du statut de la didactique de la mathématique. Il n'est possible que de faire une suggestion sur le comment faire et comment organiser la didactique de la mathématique."

Pour Wittmann, la didactique de la mathématique dépend essentiellement de la conception de l'enseignement de la mathématique en tant qu'activité qui facilite l'apprentissage de la mathématique. Il dit:
"L'enseignement de la mathématique est un domaine où nous trouvons ces quatre (4) aspects superposés:

(i) l'aspect de la discipline: certains processus d'apprentissage concernent des contenus dont la structure est déterminée par la mathématique;

(ii) l'aspect pédagogique: certains processus d'apprentissage tendent vers des objectifs pédagogiques généraux à travers des contenus d'apprentissage;

(iii) l'aspect psychologique: certains processus d'apprentissage doivent tenir compte des dispositions de celui qui apprend;

(iv) l'aspect pratique: la planification et l'exécution de l'enseignement de la mathématique imposent des décisions matures et réalistes concernant la praticabilité.

Toute personne qui oeuvre dans ce domaine de manière responsable doit se poser constamment la question suivante:

> Comment peut-on tenir compte de mieux en mieux et d'une façon toujours nouvelle de la science mathématique, des attentes de la société, des dispositions et des droits des élèves dans la conception générale et dans la pratique de l'enseignement de la mathématique?"

Nous voyons clairement que, de sa nature, la didactique de la mathématique est une science interdisciplinaire. Sa position bien établie dans le champ des disciplines a été indiquée par KAUFMAN et STEINER comme suit.[1]

Fondements de la mathématique	Mathématique pure et mathématique appliquée	Théorie de la connaissance mathématique	Histoire de la mathématique
Didactique générale	Didactique de la mathématique Didactique et méthodologie de l'enseignement de la mathématique		Heuristique mathématique
Pédagogie générale	Evaluation de l'apprentissage de la mathématique.	Psychologie de la pensée et de l'apprentissage de la mathématique.	

1 B. KAUFMAN et H.C. STEINER, The CSMP Approach to Mathematics Education, Educ. Studies in Mathematics 1. 1968/69, No. 3, pp. 312-326.

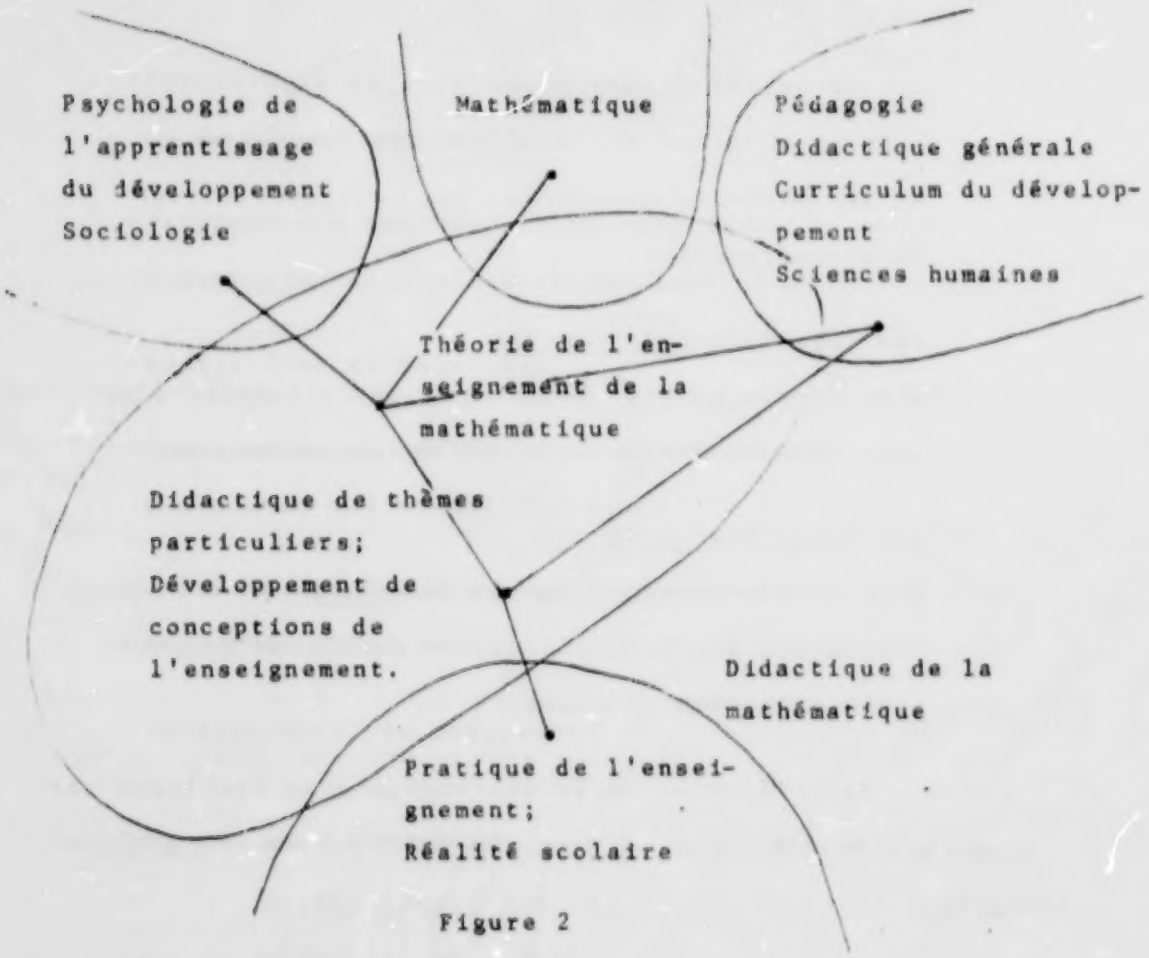


Figure 2

La figure 2 est conçue par WITTMANN. Elle met en évidence les quatre (4) aspects: discipline, pédagogie, psychologie et pratique de l'enseignement.

Contrairement aux sciences mathématiques, à la pédagogie et à la psychologie, qui sont neutres en ce qui concerne l'enseignement de la mathématique, la didactique de la mathématique se veut particulièrement pertinente pour l'enseignement par:

-son caractère prescriptif:
elle se prononce sur l'efficacité des contenus et des méthodes concernant des buts spécifiques de l'enseignement.

-son caractère constructif:
elle développe des programmes, des séquences d'apprentissage, des matériels d'enseignement, etc.

-son caractère intégrant:
elle essaie de tenir compte de toutes les dimensions du champ d'activité de l'enseignement dans un système cohérent.

Ainsi, la didactique de la mathématique se distingue par une orientation marquée vers la pratique et les applications.

Naturellement, la didactique de la mathématique exploite les résultats et les méthodes de la mathématique, de la pédagogie et de la psychologie. Mais, dans toutes ces disciplines, elle est aussi appelée à contribuer de manière originale en y ajoutant son caractère spécifique pour assurer le progrès de l'enseignement de la mathématique. Voici quelques domaines particuliers qui méritent plus spécifiquement l'attention de la didactique de la mathématique:

-Psychologie de l'apprentissage et
de la pensée mathématique.

-Mathématique scolaire et mathématique
élémentaire d'un point de vue supérieur.

-Heuristique mathématique.

-Histoire de la mathématique et théorie
des connaissances mathématiques.

-Objectifs généraux et enseignement de
la mathématique.

-Développement de programmes.

Lecture: A.Z. KRYGOWSKA, Le rôle de la didactique de la mathématique dans les études du futur enseignant, UQUAM, 22 août 1973.

2. Théorie et pratique de l'enseignement

Dans ce séminaire, nous tenterons d'élaborer quelques éléments d'une théorie de l'enseignement de la mathématique dans le cadre de la didactique de la mathématique. Puisque cette didactique doit tenir compte de la pratique de l'enseignement, nous nous proposons alors de prendre soin que l'aspect pratique soit toujours considéré.

Partant de l'idée que "rien n'est plus pratique qu'un bon modèle théorique", nos considérations auront pour but d'élaborer un ou des modèles qui nous seront utiles dans nos activités d'enseignement. Ces modèles seront à modifier ou à rejeter selon les indications que nous donnera leur utilisation pratique.
Plus particulièrement, nous rechercherons un modèle qui joue les rôles suivants:

- offrir au théoricien et au praticien une base commune d'échanges et de discussions;
- faciliter au praticien la classification et la structuration d'informations et d'expériences;
- aider le didacticien à garder le lien entre son travail et la pratique et à déterminer la position de son travail relativement à la réalité scolaire.
- servir à la description objective d'activités d'enseignement, à leur organisation et à leur analyse.

C'est dans cette optique que nous tenterons l'aventure de la "théorisation". Notre intention n'est pas, en effet, de donner une image plus scientifique à une science essentiellement expérimentale et appliquée.

3. Philosophie (éducative) de l'enseignement de la mathématique.

Avant de commencer notre "aventure de la théorisation", il me semble important de dire quelques mots sur les buts généraux de l'enseignement de la mathématique. La discussion générale de ces buts semble cristallisée de plus en plus autour de certains points dont la connaissance est nécessaire pour la compréhension des tentatives de réforme de l'enseignement de la mathématique. Voici une liste non nécessairement exhaustive de ces "opinions fondamentales" qui, bien que de nature plutôt philosophique, influencent cependant beaucoup les démarches en didactique de la mathématique.

1. La pensée mathématique est un des instruments les plus puissants, les plus efficaces et les plus élégants pour la structuration de nos expériences et de nos idées. La mathématique offre des bases à la compréhension du monde moderne et à l'accessibilité à ce monde, et elle occupe ainsi une position culturelle unique entre les sciences humaines et les sciences de la nature.

2. L'enseignement moderne de la mathématique doit intégrer la mathématique pure et la mathématique appliquée ainsi que la mathématique et d'autres disciplines. Il est alors nécessaire que des applications naturelles de la mathématique soient mises en évidence dans un tel enseignement.

3. Les idées unificatrices et les concepts unificateurs de la mathématique doivent être exploités (dans l'enseignement) dès la maternelle. L'enseignement de la mathématique est à concevoir comme un tout de la maternelle à l'univereité.

4. L'enseignement de la mathématique doit être centré sur l'activité de l'enfant même (learning by doing).

5. L'élève doit apprendre à appliquer de façon originale des connaissances mathématiques à de nouveaux problèmes (voire à des problèmes non mathématiques) et à une nouvelle mathématique à créer.

6. L'enseignement de la mathématique doit être tel qu'il rende l'enfant capable de décrire objectivement et de structurer logiquement des situations et des processus, d'analyser des relations en faisant abstraction de ses intérêts primaires.

7. L'enseignement de la mathématique doit être démocratique (tel que tous les enfants en profitent) et humain (anti-autoritaire) tel que l'enfant puisse se développer selon sa personnalité en respectant les diverses relations humaines.

8. Pour satisfaire aux exigences précédentes, la didactique de la mathématique doit développer de nouvelles formes et de nouvelles méthodes d'enseignement. L'apprentissage de la mathématique n'est que graduellement et non principalement différent de la recherche en mathématique.

Lecture a) général: H. FREUDENTHAL [7], voir aussi [16].

b) au sujet de 1: BRAUNFELD/KAUFMAN [9].

c) au sujet de 2: FREUDENTHAL [10], [12]
FORD/HALL [11].

d) au sujet de 3: BRUNER [13].

e) au sujet de 4: GRIFFITH [8]
WHITTAKER [14].

f) au sujet de 5: KRYGOWSKA [15].

4. Un modèle global d'enseignement.

A première vue, l'enseignement de la mathématique se présente à l observateur comme un champ d'activités caractérisé par une très grande complexité. Des situations ayant ce caractère de complexité se présentent souvent dans le domaine de la science, et, des travaux nombreux nous montrent comment on procède dans de tels cas de manière constructive:

> On conçoit un modèle, qui représente et qui structure toutes les composantes essentielles de la situation. Ensuite, au cours d'une étude plus approfondie, ce modèle est continuellement élargi, raffiné et modifié de sorte qu'il s'adapte de plus en plus à la situation.

Nous tenterons, dans ce séminaire, de poursuivre une démarche analogue.

4.1 Critères de base pour le choix d'un premier modèle.

Tout modèle schématise d'une certaine manière une situation en appuyant davantage sur certains aspects et en négligeant d'autres points de vue. Voici deux aspects sur lesquels devrait insister davantage un modèle conçu en didactique de la mathématique:

(i) La didactique de la mathématique se concentre en premier lieu sur la question suivante: "Comment l'élève peut-il apprendre à accéder à (cognitivement) un monde par des moyens mathématiques?" Ainsi un modèle en didactique de la mathématique insistera davantage sur le processus d'apprentissage.

(ii) L'enseignement ayant comme rôle d'organiser le processus d'apprentissage, il doit avoir des éléments de base sur lesquels appuyer ces décisions d'enseignement. Ainsi un modèle en didactique de la mathématique discriminera davantage les éléments planificateurs de l'enseignement de la mathématique.

4.2 Description grossière d'un modèle.

Voici la présentation schématique du modèle de GLASER qui est décrit en détail chez DE CECCO[1]. Il correspond à la conception de l'enseignement en tant qu'activité d'organisation de processus d'apprentissage. Il comprend 4 composantes dont les relations mutuelles sont schématisées par la figure ci-après:

1. J.P. DE CECCO, The Psychology of Learning and Instruction, Educational Psychology, New Jersey, 1968.

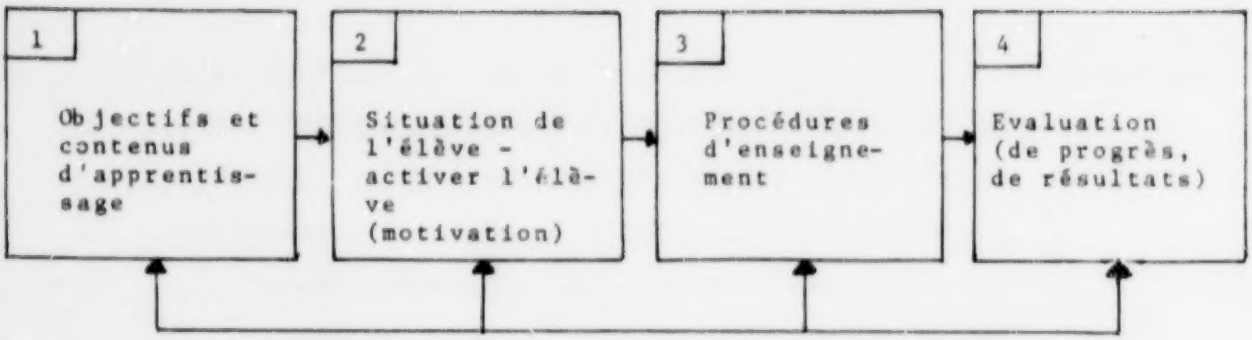


Figure 3

1. Dans la planification d'unités d'enseignement, nous devons analyser le contenu de l'enseignement et nous devons spécifier - dans la mesure du possible - les buts visés par cet enseignement.

2. Nous devons tenir compte des connaissances préalables, des expériences antérieures et du développement mental de l'enfant. Pour une participation plus active de l'élève, nous devons prévoir des moyens de motivation.

3. A partir des analyses de 1 et 2, nous devons concevoir des situations d'apprentissage en choisissant les formes d'enseignement et les moyens d'apprentissage qui conviennent.

4. L'évaluation des résultats et du progrès dans le processus d'apprentissage fait partie intégrante du modèle, parce qu'elle permet le "feed back" nécessaire à la planification et à l'exécution d'enseignements ultérieurs.

4.3 Quelques remarques relatives au modèle.

a) Contenu et buts.

Les thèmes de l'enseignement de la mathématique ou de certai-

unités sont des parties plus ou moins grandes de théories mathématiques. L'enseignant doit (devrait) analyser ces thèmes en considérant au moins ces trois aspects:

(i) l'analyse d'un point de vue mathématique supérieure; se basant sur ses connaissances de la matière qui dépassent le niveau d'enseignement, l'enseignant doit planifier à long terme le sujet à l'étude et il doit être capable de juger si une suggestion d'un texte, d'une concrétisation est acceptable ou si elle amènera plus tard à des contradictions.

Exemple: Lesquelles des trois affirmations sont contestables ou acceptables?

- Deux ensembles sont égaux s'ils ont le même nombre d'éléments.
- 5 est un nombre premier parce que, avec 5 cubes, on ne peut former qu'un seul rectangle: une rangée ou une colonne de 5 cubes.
- A est un sous-ensemble propre de B si B contient des éléments qui n'appartiennent pas à A.

(ii) l'aspect des applications; existe-t-il des situations du monde réel qui peuvent être décrites et structurées par la partie de théorie en question? Il semble évident que, dans la mesure du possible, de telles parties de la mathématique qui sont applicables (au niveau des enfants) doivent avoir une place prio-

ritaire dans l'enseignement. (Donnez quelques exemples de telles parties).

(iii) la traduction du contenu d'apprentissage dans une structure d'apprentissage; dans ce contexte nous retrouverons la recherche de concrétisations de parties de théorie.
Mais, il ne suffit pas de trouver des concrétisations. Nous cherchons des structures d'apprentissage qui font appel à la reconstruction génétique de la mathématique. Ainsi nous essayons de coordonner la structure mathématique avec la structure cognitive de l'enfant.

b) Situation d'apprentissage de l'élève.

Sous ce point, nous trouvons les analyses du point de vue de la psychologie du développement mental (sur lequel nous revenons plus tard). L'analyse des expériences et apprentissages antérieurs ainsi que les questions de motivation seront à discuter dans cette section.

c) Procédures d'enseignement.

Cette composante vise la question du "comment procéder" pendant le processus d'apprentissage. Il y a essentiellement trois (3) décisions à prendre:

(i) la considération de conditions appropriées d'apprentissage;

(ii) l'élaboration de matériels d'apprentissage;

(iii) le choix de formes d'enseignement.

(i) Des conditions générales d'apprentissage (principes didactiques) peuvent être déduites de la psychologie de l'apprentissage et des diverses théories d'apprentissage (nous y revenons au chap. 11). Des conditions particulières d'apprentissage sont souvent appelées des méthodes. Nous essayerons, au cours de ce séminaire, d'élaborer davantage la distinction entre les conditions générales et les conditions particulières d'apprentissage.

(ii) Concernant une classification de matériels d'apprentissage, nous trouvons quelques indications chez BRUNER [2] au chapitre 6 (Aids to teaching). Une grande variété de tels matériels d'apprentissage a été créée particulièrement pour le niveau élémentaire. Dans ce contexte, BRUNER a créé le concept de "mode de représentation" (inactif, iconique et symbolique) qui sera également élaboré davantage au chapitre 11.

(iii) Pour les formes d'enseignement, nous pouvons, par exemple, choisir parmi neuf (9) formes (idéalisées) classifiées selon deux (2) critères majeures:

- la forme sociale: enseignement en groupe (S_1)
  enseignement par équipes (S_2)
  enseignement individuel (S_3)

- le degré d'initiative (prévue) de l'élève:
  instruction (passive) (D_1)
  découverte dirigée (D_2)
  situations libres (D_3)

La combinaison de ces deux critères amène alors aux formes suivantes d'enseignement:

Initiative de l'élève

Formes sociales	D_1 Instruction passive	D_2 Découverte dirigée	D_3 Situation libre
S_1 groupe	(S_1, D_1)	(S_1, D_2)	(S_1, D_3)
S_2 équipe	(S_2, D_1)	(S_2, D_2)	(S_2, D_3)
S_3 individuel	(S_3, D_1)	(S_3, D_2)	(S_3, D_3)

d) Evaluation des progrès et des résultats.

L'évaluation intéresse le didacticien dans la mesure où elle lui fournit des réponses aux questions suivantes:

(i) dans quelle mesure les buts de l'enseignement ont-ils été atteints (essentiellement en vue de la planification de l'enseignement ultérieur);

(ii) dans quelle mesure des buts partiels ont-ils été atteints;

(iii) les procédures d'enseignement ont-elles été appropriées?

A partir de cette description très grossière, nous tenterons d'élaborer davantage certains aspects particuliers du modèle. Cependant, j'espère que ces quelques remarques susciteront déjà une vive discussion.

II Quelques éléments d'une théorie de l'enseignement de la mathématique.

Dans ce chapitre, nous esquisserons quelques théories d'apprentissage qui incorporent "la structure de la connaissance humaine" dans son approche et qui sont d'une importance fondamentale pour la planification aussi bien locale que globale de l'enseignement de la mathématique - plus particulièrement pour la mise en place de conditions adéquates d'apprentissage. Nous y décrivons ensuite quelques principes didactiques pertinents pour l'enseignement de la mathématique.

1. L'oeuvre de J. PIAGET.

L'oeuvre de J. PIAGET représente probablement la théorie la plus vaste et la plus importante de la connaissance qui a été créée à date. Elle est probablement aussi celle qui trouve le plus d'application dans l'enseignement de la mathématique. Dans cette théorie nous pouvons distinguer, entre autres, une partie qui traite du développement cognitif caractérisé par des stades spécifiques (théorie des stades). Nous présumons que cette partie est assez connue et que nous pouvons l'omettre dans cette esquisse. Une autre partie de l'oeuvre de PIAGET peut être appelée la théorie de l'équilibration qui fait des affirmations concernant les invariants fonctionnels de l'intelligence c'est-à-dire l'organisation et l'adaptation. Nous discutons maintenant brièvement de cet aspect.

1.1 La théorie de l'équilibration.

L'idée fondamentale de la théorie de l'équilibration est la suivante: l'individu vit dans un monde environnant (milieu) qui lui impose des contraintes, qui lui oppose des résistances, des exigences, qui change continuellement et qui influe sur ses sens; d'autre part, ce milieu lui fournit les provisions de première nécessité. Par contre, l'individu ne reste pas passif devant cet environnement. Il s'ajuste au milieu dans le cadre de ses possibilités et il essaie pour sa part de le changer pour que celui-ci corresponde mieux à ses besoins. Globalement se développe alors une interraction qui sert de régulateur de tension entre l'individu et son environnement, c'est-à-dire qui sert à établir et à maintenir des états d'équilibre.

Cette interaction contient, en plus de l'aspect cognitif, (structurel) un aspect affectif (force de motivation). Piaget a étudié surtout l'aspect cognitif.

1.1.1. Les invariants fonctionnels de l'intelligence: l'organisation et l'adaptation.

Selon PIAGET, l'individu possède par hérédité des fonctions biologiques et des comportements sensori-moteurs, mais non des structures intellectuelles. Ce qui est également transmis par hérédité, c'est la façon dont un individu entre en interaction avec son environnement. Ce "modus operandi" est ca-

ractérisé par le fait que l'individu s'organise intérieurement et qu'il s'adapte extérieurement à l'environnement. Les deux invariants de l'intelligence, l'organisation et l'adaptation, sont des aspects intérieurs et extérieurs de l'interaction qui sont étroitement reliés: un système chaotique et non-différencié (c'est-à-dire non-organisé) ne peut pas s'adapter.

Remarques relatives à l'organisation.

L'individu s'efforce continuellement d'assembler les résultats de l'interaction en une "image de la réalité" qui est de plus en plus cohérente et coordonnée. Cette image est améliorée progressivement et elle détermine le comportement de l'individu en vue d'un succès maximal.

Les "images de la réalité" que les différents individus se construisent diffèrent considérablement. Une interaction entre les individus est alors nécessaire pour arriver à des conceptions communes.

Remarques relatives à l'adaptation.

Selon la conception que l'environnement influe sur l'individu aussi bien que l'individu s'implique dans des activités qui ont pour but de maîtriser l'environnement, on distingue deux aspects de l'adaptation: l'accommodation et l'assimilation. En d'autres mots: l'adaptation cognitive se fait aussi bien par une accommodation de l'individu à son environnement que par une assimilation (incorporation) de l'environnement dans l'image

cognitive de l'individu. Dans ce dernier processus, l'environnement est idéalisé pour qu'il conviennne à l'image cognitive.

Selon Piaget, l'individu a un besoin fondamental d'équilibration avec son environnement et que d'une image de ce milieu qui ne soit pas contradictoire. Il tentera alors d' établir une correspondance entre la réalité et l'image de la réalité qu'il s'est construite (tendance de l'adaptation et de l'organisation). L'élargissement de l'image de la réalité pouvant être conçu en tant qu'apprentissage, il existe, pour Piaget, une motivation cognitive très forte pour l'apprentissage: l'équilibration.

Ainsi, "l'image de la réalité" est le résultat d'une organisation intérieure avec lequel l'individu tente de maîtriser son environnement. Le processus d'adaptation (accommodation et assimilation) assure la continuité du développement de cette image. Les premiers moyens d'interaction de l'individu avec son environnement sont des actions (concrètes). Les moyens ultérieurs d'acquisition de connaissances de la réalité (la pensée) doivent alors s'être développés à partir d'actions concrètes. La transition des actions concrètes aux opérations intellectuelles est caractérisée par la dissociation graduelle des actions des objets concrets et par le fait que les actions concrètes sont de plus en plus remplacées par des actions imagées (intériorisation, symbolisation, expression verbale). Le progrès intellectuel est causé principalement par l'organisation des opérations (en tant que produit de développement intellectuel des

actions concrètes) en des systèmes flexibles (groupements) qui permettent à l'individu une adaptation intelligente. La formation de groupements au stade des opérations concrètes (7/8 à 11/12 ans) amène, dans le développement intellectuel de l'enfant, à un premier équilibre cognitif stable avec la réalité concrète.

1.1.2. Schèmes cognitifs.

Pour compléter la théorie d'équilibration, il nous reste à discuter du concept de schème (cognitif). SKEMP[1] définit un schème comme structure intellectuelle par laquelle des formes existantes de la connaissance et du comportement sont intégrées.

DE CECCO [17] donne la description suivante: "We recognize a schema by both its internal and its external aspects. Internally, it is the cognitive structures (or processes) which initiate and control the accomodations the child makes to his environnement. Externally, it is a collection of cohesive behaviors or actions".

E. WITTMANN [1] suggère la définition suivante: Un schème est un patron de réflexes, d'opérations, de pensées, de descriptions ou d'explications qui est organisé, de façon souple, qui est cohérent et adaptable. Un tel schème est intégré dans l'organisation cognitive globale de l'individu et il dirige les activités de l'individu.

Dans ce sens, les structures formelles de la mathématique (en tant que théorie des modèles possibles de pensée) sont des

schèmes, ainsi que les concepts, les idées de base, les méthodes, les algorithmes, les théorèmes, les théories. SKEMP[1] prétend que la mathématique entière n'est pas autre chose que la construction de schèmes conceptuels et l'application de ceux-ci.

Autres remarques relatives au concept de schème.

(a) Un schème est dynamique et non "schématique" (dans le sens de rigide ou immobile).

(b) Un schème n'existe pas de manière isolée, il est plongé dans la structure cognitive globale.

(c) Un schème peut être généralisé ou il peut discriminer: un individu se sert d'un schème dans le processus de l'adaptation. Selon ce qui domine dans ce processus, l'assimilation ou l'accommodation, un schème peut être modifié comme suit: il est appliqué sur des objets nouveaux (généralisation) ou il est restreint, si c'est nécessaire, dans un processus d'accommodation (discrimination).

(d) A cause du caractère abstrait des schèmes et de l'économie de pensée, l'individu tente de minimiser l'effort cognitif. Il fait donc abstraction des particularités et des hasards et il les subordonne à un seul schème (exemple: le schème de la comparaison des cardinalités comprend toutes les comparaisons

1. R.R. SKEMP, Schema-orientiertes Lernen im Bereidr der Mathematik, in LUNZER/MORRIS (Hrsg): Das menschiche Lernen und seine Entwicklung, Stuttgart, S. 434-459.

concrètes possibles de cardinalités). L'individu tente d'élargir autant que possible le domaine d'action d'un schème; il tente de discriminer aussi peu que possible. Au besoin, on différencie un schème; exemple: "prendre la moitié" comme sous-schème du schème "décomposer".

(e) Lorsque de jeunes enfants apprennent un schème, nous observons la <u>réaction circulaire</u>: Ils exercent avec beaucoup de patience un nouveau schème. Pendant ces exercices, ce nouveau schème est généralisé, discriminé et différencié et il est intégré à d'autres schèmes. Ce n'est alors pas un exercice stéréotypé. L'incorporation d'un schème dans le répertoire cognitif est d'une durée relativement longue.

(f) La réorganisation continuelle et la revision de la "structure cognitive" (en tant qu'entité des schèmes disponibles) pendant le développement de l'enfant montre la tendance suivante: Les schèmes relativement globaux s'articulent et s'appliquent d'abord de manière non-différenciée et isolée; au cours du développement, ils s'articulent davantage et ils se différencient; ce processus est caractérisé par une coordination et une intégration hiérarchique des schèmes.

1.1.3 Reformulation de la théorie de l'équilibration.

Par l'organisation et par la coordination de schèmes cognitifs dans un système cognitif global, l'individu développe une "image de la réalité". Ensuite, il élabore davantage cette image pour qu'elle corresponde de mieux en mieux à l'environnement et pour qu'un équilibre de plus en plus parfait s'établisse entre lui et son environnement. La structure cognitive lui sert à franchir des obstacles, à rechercher des informations, à découvrir de nouveaux aspects, à réduire le hasard des décisions, à optimiser ces décisions, à maintenir ou à transformer des états, à résoudre des problèmes, etc.

L'adaptation (cognitive) entre l'individu et son environnement est caractérisée par l'assimilation et par l'accommodation. L'assimilation (pure) signifie que l'individu maintient son schème: il explore son environnement en fonction de ce schème et il essaie de lui subordonner un domaine possiblement maximal de l'environnement. Dans l'accommodation (pure), l'individu fait face à un problème donné de l'environnement; il teste les schèmes disponibles par rapport à ce problème; il les modifie ou en développe de nouveaux pour résoudre le problème.

Généralement, l'assimilation et l'accommodation ne sont pas nettement séparées dans le processus de l'adaptation. En effet, l'individu essaie de résoudre un problème donné aussi bien en testant des schèmes disponibles et en les modifiant

(accommodation) qu'en reformulant le problème de façon à ce qu'il convienne à un schème donné (assimilation). Cette dernière stratégie est souvent utilisée dans l'heuristique.

Face à une classe de problèmes, on atteint l'équilibre si l'assimilation et l'accommodation produisent une solution pour tout problème de la classe.

1.2 Conséquences de la psychologie de PIAGET pour l'enseignement de la mathématique.

1.2.1 Le principe de l'orientation vers l'élève.

Si l'on accepte le modèle piagetien du processus d'apprentissage, alors on est amené à adopter comme base d'une conception didactique le principe qui se décrit de la façon suivante:

Le point de départ de tout enseignement est la structure cognitive actuelle de celui qui apprend. Des activités d'assimilation et d'accommodation pratiquées par l'élève sont des conditions primordiales de tout apprentissage; l'enseignement doit prévoir des situations adéquates d'apprentissage qui permettent de telles activités.

Ce principe très général se précise par un certain nombre de principes plus spécifiques qui se recoupent partiellement.

1.2.2. Le principe de l'intégration.

L'interaction de l'individu avec son environnement est d'autant plus efficace que ses connaissances (schèmes) sont intégrées et organisées de façon complète et dynamique dans un treillis de relations.

L'enseignement doit alors viser à l'élaboration de relations entre les connaissances et à la découverte de la cohérence d'un contenu conceptuel.

Ce principe signifie un refus de principes traditionnels comme "l'isolement de difficultés", "la construction linéaire d'un contenu", "l'enseignement micro-gradué", etc.,

Exemples: (1) Divisibilité dans Z. Voir les liens qu'il y a entre la relation "divise" et les opérations:

Si a/b et a/c alors a/b + c

a/b - c

a/b x c;

règles de divisibilité; nombres divisibles par n et par m: diviseurs communs à 60 et à 132, etc; il s'agit alors d'élaborer des ensembles structurés sous l'aspect de la divisibilité.

(2) L'aire d'un triangle. Voir les liens entre l'aire d'un triangle et l'aire d'autres figures; compatibilité de l'aire avec des transformations: isométries et autres transformations conservant l'aire (SCHERUNG); changement de l'aire lors d'une transformation affine; décomposition et composition des figures et des aires; différentes formes de la formule d'aire d'un triangle en relation avec différentes compositions ou décompositions géométriques, etc.

1.2.3 Le principe dynamique.

Ce principe veut généralement mettre en évidence que l'instruction est sans effet si elle n'est pas accompagnée d'une construction active de la part de l'élève. Appliqué à l'enseignement, on le formulera comme suit:

L'enseignement doit concevoir et organiser des activités qui confrontent l'élève de manière active et intensive avec le sujet à enseigner.

En général, le moyen par excellence pour réaliser ce principe est la situation de problème. Comme on l'observe facilement chez soi-même, la solution de problèmes

est une condition primordiale pour tout processus d'apprentissage. La considération contemplative de manuels ou de conférences n'est que d'une valeur très restreinte.

A l'élémentaire, ce sont surtout des activités manuelles effectuées sur du matériel concret qui rendent justice à ce principe.

1.2.4. Le principe de redondance.

La confrontation des élèves avec des contenus nouveaux ou avec des problèmes nouveaux devrait se faire à partir de situations qui ne contiennent que quelques éléments ou quelques aspects réellement nouveaux mais dans lesquelles on retrouve des possibilités variées et riches d'application de schèmes bien connus.

L'application de ce principe facilite l'engagement de l'élève dans une activité personnelle et elle favorise l'intégration de connaissances nouvelles dans le système des connaissances acquises.

Parmi les méthodes d'application de ce principe, nous retrouvons souvent la formulation de nouveaux problèmes dans des contextes bien connus ou la transformation de problèmes abstraits en des concrétisations quotidiennes et faciles à comprendre.

Exemples: (1) L'introduction aux classes modulo n peut se faire dans le contexte de la représentation des nombres naturels dans les diverses bases. L'addition et la multiplication dans l'anneau des classes résiduelles modulo n peuvent être interprétées en tant que restriction de l'addition et de la multiplication dans N aux unités de la base n.

(2) Le théorème "HAND-SHAKE": Le théorème de la théorie des graphes qui dit "dans un graphe fini, le nombre de sommets d'ordre impair est toujours pair" peut être concrétisé de la manière suivante: Dans un party, le nombre de personnes qui donnent la main à un nombre impair de personnes est toujours pair.

1.2.5 Le principe de stabilisation.

Tout schème cognitif acquis dans un certain contexte doit, de temps à autres, être exercé et appliqué dans d'autres contextes. De cette manière il est généralisé, discriminé, différencié; il s'intègre à d'autres schèmes et il devient ainsi une partie stable de la structure cognitive de celui qui apprend.

La manière d'enseigner qui traite d'un certain contenu une fois et dans un temps limité ne tient pas compte de ce principe de stabilisation. Malheureusement, la plupart des programmes favorisent cette sorte d'enseignement. Pour tenir compte du principe de stabilisation, il faudra alors prévoir, dans le programme, des phases de consolidation, qui n'apportent rien de nouveau du point de vue du contenu, mais qui présentent un contenu connu, dans un autre contexte.

Exemple: L'étude et la structuration d'un ensemble de nombres (donné éventuellement sous forme d'un tableau cartésien; voir le travail de Nicole Martin) se situent dans un contexte de stabilisation du concept du nombre naturel et de l'arithmétique.

1.2.6 Le principe opératoire.

La manipulation d'objets concrets joue un rôle très important pour le développement de l'intelligence (même au stade des opérations formelles).

L'enseignement doit alors être conçu de façon à ce que les opérations qui se développent en tant qu'intériorisations d'actions concrètes puissent s'organiser en groupements.

Les concepts fondamentaux de la mathématique sont basés précisément sur des actions. Ces concepts ne se forment pas comme des concepts empiriques (par exemple: bleu, lourd, fleur) par abstraction d'objets mais ils se forment par abstraction d'actions (abstraction réfléchissante[1]) Les concepts opératoires doivent alors être basés sur les actions qui les définissent. La variation des objets sur lesquels les actions sont applicables sert alors à la reconnaissance des opérations comme partie essentielle.

Indépendamment de la théorie de Piaget, le point de vue opératoire est présent dans l'enseignement de la mathématique, des sciences et de la philosophie. Dans la mathématique, ce point de vue est généralement adopté par tous ceux qui prônent une approche constructive.

1.2.7 Quelques critères pour le choix d'exercices.

Les quelques principes didactiques tirés de la théorie de Piaget nous permettent également d'énumérer certains critères pour le choix d'exercices:

a) La résolution d'un problème doit contribuer à une compréhension approfondie ou élargie des schèmes impliqués. Exemple: Si c'est la multiplication qui doit être pratiquée,

---

1. BETH, E.W./PIAGET, J., Epistémologie Mathématique et Psychologie, Paris 1961, p. 217 ff.

alors il faudra la représenter sous forme de produit cartésien en tant qu'addition répétée ou à l'aide de diagrammes d'arbres, etc.

b) Un exercice doit contribuer à l'intégration du schème à exercer avec d'autres schèmes. (Exemple: établir des liens entre opérations algébriques et opérations géométriques).

c) Un exercice doit être tel que, si l'on applique le schème à exercer de manière compréhensive, la solution soit particulièrement simple et significative.

Exemple: $24 \times 37 + 24 \times 62 = 24 \times (37 + 62) = 24 \times (100 - 1)$
$= 2400 - 24 = 2376$

d) Un exercice doit tenter de mettre en évidence des relations diverses entre différents problèmes et il doit être le germe de tout un complexe de problèmes.

Exemple: Un exercice de comparaison de longueurs dans le contexte du problème de la mesure (voir aussi la conférence de F. LEMAY concernant les problèmes, les actions impliquées et les liens entre les divers problèmes).

e) Dans la mesure du possible, les exercices du "drill" doivent être situés dans un contexte où l'application répétée et l'exécution rapide d'un schème sert à un but ultérieur et où l'élève ne se rend pas compte de l'ap-

plication stéréotypée du schème.

Exemple: "Drill" de la table de multiplication: nous écrivons tous les nombres naturels de 0 à 99 en deux chiffres (00, 01, 02, ..., 09, 10, 11, ...). A partir d'un nombre donné, nous engendrons un autre nombre en multipliant les nombres représentés par les deux chiffres: 79 → 63. Ainsi nous pouvons contruire des séries de nombres (79→ 63 → 18 → 08 → 00) qui sont plus ou moins longues. Engendre de telles séries à partir de différents nombres. Que remarques-tu?

2. La théorie de J. S. Bruner

Avant d'esquisser les aspects principaux de la théorie de BRUNER, nous recommandons la lecture de J.S. BRUNER même [2] et [3]. Nous pensons que cette lecture devrait être obligatoire pour tout enseignant.

Le chapitre III du livre de BRUNER "The process of education" [2] commence par le fameux paragraphe suivant:

> "We begin with the hypothesis that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development. It is a bold hypothesis and an essential one in thinking about the nature of a curriculum. No evidence exists to contradict it; considerable evidence is being amassed that supports it".

Cette hypothèse de BRUNER a souvent été mal interprétée. D'abord, son caractère d'hypothèse a souvent été oublié et on l'a interprétée comme résultat des recherches de BRUNER. Ensuite, elle a été mise en opposition avec les stades Piagétiens du développement intellectuel de l'enfant. En fait, elle ne contredit nullement la théorie des stades de Piaget. A la base de cette hypothèse, nous devons considérer un principe que BRUNER pose au départ de ses réflexions.

2.1 Importance de la structure.

Principe de l'orientation par la structure: L'enseignement de toute discipline doit être orienté par les idées fondamentales ("structure") de cette science.

Pour l'enseignement de la mathématique cela signifie que son enseignement doit être orienté par les idées fondamentales (processus de pensée) de la mathématique. Ceci signifie beaucoup plus que de faire apprendre quelques structures mathématiques comme le groupe, le corps, l'espace vectoriel, etc. Ce principe signifie, entre autres, qu'il faut faire connaître, à celui qui apprend, les méthodes de travail du mathématicien (raisonnements, méthodes d'engendrement de nouveaux objets à partir d'objets connus, processus de structuration (classification, sériation, établissement de relations), processus de généralisation, d'application (recherche de modèles appropriés), etc. L'interprétation restreinte de ce principe, qui prône principalement l'enseignement des structures algébriques fondamentales, fait plus de mal que de bien et c'est elle à laquelle s'objectent présentement beaucoup de didacticiens (voir remarques de W. HIGGENSON et F. LEMAY).

J.S. BRUNER invoque quatre motifs pour énoncer ce principe:

> There "are at least four general claims that can be made for teaching the fundamental structure of a subject, claims in need of detailed study.
>
> The first is that understanding fundamental structure of a subject more comprehensible. ...

> The second point relates to human memory. Perhaps the most basic thing that can be said about human memory, after a century of intensive research, is that unless detail is placed into structured pattern, it is rapidly forgotten. ...
>
> Third, an understanding of fundamental principles and ideas, as noted earlier, appears to be the main road to adequate "transfer of training". To understand something as a specific instance of a more general case - which is what understanding a more fundamental principle or structure means - is to have learned not only a specific thing but also a model for understanding other things like it that one may encounter. ...
>
> The fourth claim for emphasis on structure and principles in teaching is that by constantly reexamining material taught in elementary and secondary schools for its fundamental character, one is able to narrow the gap between "advanced" knowledge and "elementary" knowledge."

Sous cette optique, l'hypothèse de BRUNER se reformule ainsi:

Les idées de base d'une discipline sont accessibles à tout enfant (indépendamment de son âge et de son origine sociale) dans une forme appropriée à ses capacités de pensée et à ses propres moyens de représentation.

BRUNER accepte essentiellement les idées de PIAGET. Cependant il dépasse ce dernier sur un point décisif. Dans ses travaux, PIAGET n'a guère considéré l'influence que le développement cognitif de l'humanité exerce, à travers les processus sociaux utilisés, sur le développement cognitif de la génération montante. BRUNER, par contre, voit précisément cette influence et il en tient compte en introduisant des concepts comme l'"instruction" et la "transmission".[1]

A l'intérieur de la théorie de PIAGET, nous pourrions formuler un "principe de l'orientation par les schèmes" qui serait similaire au principe BRUNERIEN de l'orientation par la structure. Mais, alors, l'emphase serait mise sur la formation de schèmes partant uniquement de l'individu. Le principe de BRUNER exprime par contre l'idée que les grands schèmes (structures) de la connaissance ne peuvent pas être développés de nouveau par chaque individu, mais qu'ils doivent être transmis par instruction. Si l'on reconnaît ce principe réaliste et raisonnable, alors il reste le problème didactique d'accorder et de coordonner le principe de l'orientation par la structure avec celui de l'orientation vers l'élève. BRUNER même a fait des suggestions pour résoudre ce problème. Nous en discutons quelques-uns ci-après.

---

1 Voir plus particulièrement J.S. BRUNER, Towards a theory of Instruction, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachussetts, 1967, page 6.

2.2 Enseignement en spirale.

BRUNER suggère une organisation des programmes d'enseignement telle que les concepts fondamentaux ou les structures de base soient enseignés déjà aux jeunes enfants mais d'une manière intuitive et de façon appropriée à leur développement mental. Ultérieurement, le même concept ou la même structure est reconsidéré à des niveaux supérieurs d'abstraction ou de formalisation pour que l'individu puisse les maîtriser de plus en plus de manière adulte. Ce fameux principe de l'enseignement en spirale est décrit par BRUNER même de la manière suivante:[1]

> "The early teaching of science, mathematics, social studies, and literature should be designed to teach these subjects with scrupulous intellectual honesty, but with an emphasis upon the intuitive grasp of ideas. A curriculum as it develops should revisit these basic ideas repeatedly, building upon them until the student has grasped the full formal apparatus that goes with them. Fourth-grade children can play absorbing games governed by the principles of topology and set theory, even discovering new "moves" or theorems. They can grasp the idea of tragedy and the basic human plights represented in myth. But they cannot put these ideas into formal language or manipulate them as grownups can. There is much still to be learned about the "spiral curriculum" that turns back on itself at higher levels!"

1 J.S. BRUNER [2], pages 13, 52 à 54.

"The "spiral curriculum". If one respects the ways of thought of the growing child, if one is courteous enough to translate material into his logical forms and challenging enough to tempt him to advance, then it is possible to introduce him at an early age to the ideas and styles that in later life make an educated man. We might ask, as a criterion for any subject taught in primary school, whether, when fully developed, it is worth an adult's knowing, and whether having known it as a child makes a person a better adult. If the answer to both questions is negative or ambiguous, then the material is cluttering the curriculum".

"So too in science. If the understanding of number, measure, and probability is judged crucial in the pursuit of science, then instruction in these subjects should begin as intellectually honestly and as early as possible in a manner consistent with the child's forms of thought. Let the topics be developed and redeveloped in later grades".

A ce principe BRUNERIEN nous pouvons en subordonner trois autres:

Le principe de l'apprentissage anticipé: L'enseignement d'un contenu conceptuel ne doit pas être repoussé jusqu'à ce que l'apprentissage final et définitif semble en être possible; mais cet apprentissage doit être préparé de manière appropriée

dès que possible.

Exemple: Probabilité et statistique à l'élémentaire.

Le principe de la continuation: L'enseignement d'un thème à un certain point du programme doit être tel qu'un développement de ce thème à un niveau supérieur soit possible. Sont à éviter des approches didactiques superficielles qui nécessitent plus tard un changement de pensée.

Exemple: Un professeur dit: "Dans la cour, vous voyez beaucoup d'enfants; alors vous voyez un ensemble d'enfants".

Le principe de la construction: La construction d'un concept ou d'un contenu conceptuel doit précéder son analyse.

Exemple: Enseignement traditionnel de la mathématique: définition, théorème, démonstration, exemples!

2.3 Principes reliés aux modes de représentation.

BRUNER a formé la notion du "mode de représentation" pour décrire des connaissances ou pour les rendre accessibles. Il distingue trois modes: le mode "enactif" (représentation par des actions), le mode "iconique" (représentation par des images) et finalement le mode "symbolique" (représentation par des signes ou par le langage).

Selon la théorie de PIAGET, le mode "enactif" est primordial pour l'accessibilité à la réalité. Dès l'enfance jusqu'au stade des opérations concrètes, les actions jouent un rôle do-

minant. Ces actions concrètes peuvent être remplacées, au cours du développement, par des actions imagées aussi bien que la réalité même peut être remplacée par des images.

Les images apportent un progrès déterminant: elles permettent la considération simultanée de chaînes d'actions ("images become great summarizers of action"[1]) ainsi que la description et la comparaison d'actions que l'on ne peut pas effectuer concrètement en même temps.

Le développement du mode symbolique commence dès l'apprentissage de la langue maternelle. Selon la conception de Piaget, le développement de ce mode est basé sur des actions et des images et il n'acquiert une certaine importance qu'au stade des opérations formelles.

Pour l'enseignement à l'élémentaire, les modes "enactif' et "iconique" sont les formes "naturelles" pour rendre accessibles des connaissances, pour les représenter. Le mode symbolique joue un rôle secondaire à ce niveau parce que la manipulation de symboles, qui caractérise la supériorité de ce mode, semble nécessiter (au moins) une pensée qui a atteint le stade des opérations formelles.

Il en découle un principe, qui est d'une certaine importance pour la réalisation du principe de l'enseignement en spirale:

---

1 J.S. BRUNER, Towards a theory of instruction, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachussetts, 1967, p. 13.

Le principe de la préfiguration: Au stade pré-opératoire et au stade des opérations concrètes, il faut développer les racines pré-symboliques et pré-verbales des concepts et des opérations formelles qui serviront alors comme base de la symbolisation.

Ce principe donne préférence aux modes pré-symboliques dans le cadre de l'enseignement à l'élémentaire. Cependant, cela ne signifie pas que ces modes ne peuvent pas être dépassés à l'élémentaire ni que tout apprentissage à l'élémentaire (surtout au deuxième cycle) doit nécessairement débuter dans le cadre d'un mode "enactif". Déjà, le principe de l'enseignement en spirale suggère qu'il y ait progression dans le développement des concepts à des niveaux différents. La considération des différents modes de représentation fait penser à des façons diverses d'assurer une telle progression: les connaissances acquises avec différents modes de représentation et qui sont disponibles dans différents modes sont plus faciles à mémoriser; de plus la transposition de connaissances d'un mode à l'autre contribue à l'approfondissement de ces connaissances et facilite leurs applications (dans des solutions de problèmes, par exemple).

Ainsi on pourra formuler un principe qui peut être considéré comme complémentaire au principe précédent:

Le principe du transfert intermodal: L'enseignement doit concevoir des situations qui encouragent la transposition d'un contenu d'un mode de représentation dans un autre.

Cela ne signifie pas seulement que l'enseignement doit encourager l'enfant à progresser du mode "enactif" au mode "iconique" et finalement au mode "symbolique". La capacité de représenter "iconiquement" un contenu déjà maîtrisé symboliquement est signe d'une appréhension profonde du même contenu.

Faute de temps et parce que d'autres approches au problème de l'enseignement de la mathématique font le sujet d'au moins un autre cours, nous omettons ici de décrire l'approche "behavioriste" que l'on trouve explicitée davantage chez R.M. GAGNE.[1] Dans ce qui suit, nous considérons plutôt des méthodes que l'on peut appliquer pour construire des séquences de situations d'apprentissage.

---

1 R.M. GAGNE, Instruction Based on Research in Learning, Engencering Education 61, No. 6, 1971, pp. 519-523.

III Méthodes de construction de séquences de situations d'apprentissage en mathématique.

Il importe de considérer à cet endroit trois méthodes principales de mettre en séquence des situations d'apprentissage:

1) la méthode qui se base sur la présentation déductive de théories mathématiques (concrétisation de théories mathématiques),

2) la méthode qui est guidée par les objectifs d'apprentissage (analyse d'objectifs),

3) la méthode qui vise une reconstruction génétique de la mathématique (méthode génétique).

La présentation de ces méthodes ne se veut pas du tout exhaustive ou complète. Elle vise plutôt la confrontation, avec la discussion, l'introduction à une étude plus sérieuse et, éventuellement, la justification du choix de la méthode génétique pour les travaux de notre projet.

1. La concrétisation de théories mathématiques.

La présentation déductive (ou axiomatique) est utilisée par les mathématiciens dans leurs cours universitaires, dans des périodiques mathématiques pour communiquer des résultats de recherches mathématiques et des démonstrations. Au cours du 20e siècle, cette forme s'est développée en un programme

qui donne à la mathématique une autonomie particulière.

Ce mode de présentation a les caractéristiques suivantes: manière élégante et systématique de présenter des résultats achevés - définitions explicites et précises - choix approprié des axiomes et des définitions - généralité aussi grande que possible de la présentation - restriction à des aspects purement mathématiques - etc.

A l'école, nous retrouvons ce mode de présentation appliqué à certains aspects d'une théorie tandis que d'autres sont admis naïvement (exemple: l'enseignement traditionnel de la géométrie). Dans le cadre de la réforme de l'enseignement de la mathématique, la méthode qui consiste à mettre en séquence des situations d'apprentissage selon une présentation déductive de théories mathématiques s'est infiltrée dans l'enseignement, probablement à cause des deux facteurs suivants:

a) l'argument que la marge entre ce qui s'enseigne à l'école et le développement de la science mathématique devient trop grande a incité à un effort que l'on pourrait appeler "l'imitation déductive";

b) le fait que les didacticiens en mathématique étaient avant tout des mathématiciens ayant des "intérêts" très limités du côté de la pédagogie ou de la psychologie.

On trouve dans le SMSG - Curriculum pour la géométrie -

un exemple éclatant de cette approche déductive. Dans notre environnement immédiat, nous trouvons des éléments d'une telle approche, entre autre dans les livres de P. DECELLES et de G. PAPY pour le secondaire et, pour l'élémentaire, dans la série Géométrie dynamique.

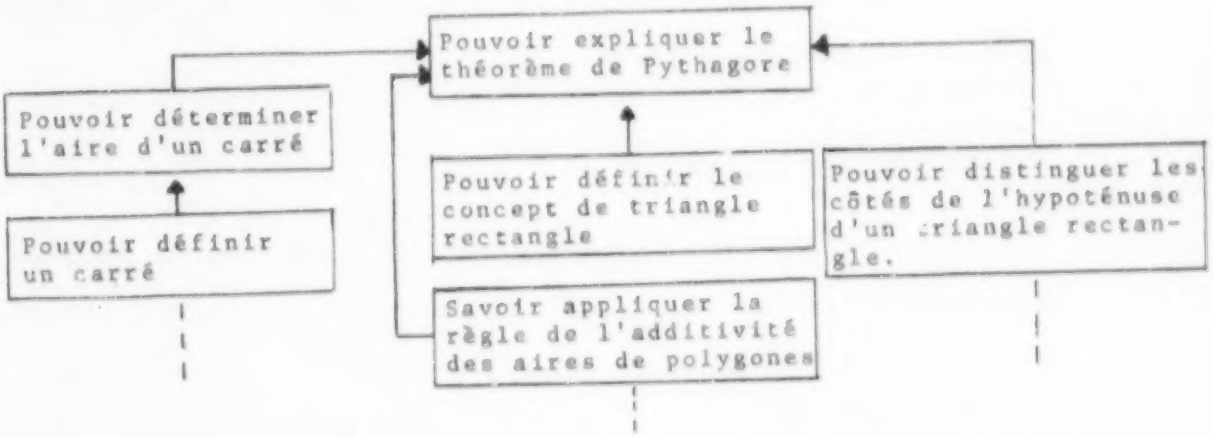
Les reproches que l'on peut faire à cette méthode sont assez évidentes. Plusieurs sont décrits dans un ouvrage de H. FREUDENTHAL [7]. -Il importe, cependant, de ne pas confondre cette méthode basée sur une présentation déductive avec la nécessité d'initier les élèves à des concepts de structures et à la méthode axiomatique.

2. L'analyse d'objectifs.

Selon la théorie d'apprentissage de GAGNE, tout objectif d'apprentissage peut être classifié dans un des types d'apprentissage de la hiérarchie que lui-même établit. En mathématique, il s'agit principalement d'apprentissage de concepts et de règles (théorèmes, lois, etc). Pour tout type d'apprentissage, GAGNE spécifie des conditions d'apprentissage. Ces conditions d'apprentissage sont divisées en des conditions extérieures et en des conditions intérieures. Les conditions intérieures à celui qui apprend sont la maîtrise d'objectifs subordonnés ou pré-subordonnés (en mathématique c'est souvent la connaissance de concepts et de théorèmes prérequis).

Un objectif donné doit alors être analysé à la lumière des

objectifs prérequis (analyse d'objectifs). De cette manière, à toute unité d'enseignement peut être associée une structure d'apprentissage (learning set) qui consiste en l'énumération et en la mise en relation des objectifs prérequis. Cette association d'une structure d'apprentissage à une unité d'enseignement (objectif analysé) n'est pas du tout unique et on est amené à considérer différentes structures d'apprentissages pour le même objectif. Voici un exemple d'une structure d'apprentissage associée à l'objectif de "pouvoir expliquer le théorème de Pythagore".



L'analyse d'objectifs est un moyen excellent d'acquérir un aperçu global d'un projet d'enseignement.

La méthode de mise en séquence de situations d'apprentissage basée sur l'analyse d'objectifs peut alors être décrite de manière suivante: Les objectifs qui figurent dans une structure d'apprentissage doivent être arrangés dans une séquence linéaire telle que l'objectif x qui précède l'objectif y dans la structure d'apprentissage soit visé avant que l'on ne vise l'objectif y. Les étapes de cette séquence sont alors suivies

successivement dans l'enseignement et tout objectif particulier est traité ou élaboré (en tenant compte des conditions d'apprentissage appropriées) tant et aussi longtemps que celui-ci n'est pas complètement atteint.

Cette méthode pose alors le problème crucial de formuler un objectif de façon à ce qu'il devienne possible d'évaluer s'il a été atteint ou non: Ces objectifs doivent être exprimés sous forme de comportements observables ("behavioral objectives"). Trois conditions ont été établies pour la formulation d'un objectif de comportements (MAGER, 1965)[1]:

1) Il doit indiquer quelle activité l'élève doit maîtriser après avoir atteint l'objectif (comportement terminal),

2) il doit indiquer sous quelles conditions le comportement doit être fourni (condition de comportement),

3) il doit indiquer quel comportement est encore acceptable (évaluation).

Le processus de transformation d'un objectif général en un objectif de comportement est appelé l'opérationalisation d'objectifs.

Quoique cette méthode puisse apparaître logique et rationnelle, il y a des objections majeures à soulever contre une ap-

---

1 R.F. MAGER, Lernziele und programmierter Unterricht, WEINHEIM - BERLIN - BASEL, 1965.

plication totale de cette méthode dans l'enseignement de la mathématique:

a) Les théories qui sont à la base de cette méthode ne rendent pas justice à la science de la mathématique. La mathématique ne peut pas être considérée comme un domaine de connaissances achevées et finalisées et elle ne peut pas être disséquée dans ses composantes comme un cadavre.

b) Quoiqu'il soit possible d'opérationaliser certaines connaissances élémentaires et certaines techniques intellectuelles de base, les stratégies cognitives ne peuvent pas être opérationalisées. Ainsi, une partie importante des objectifs généraux ne peut pas être considérée par cette méthode.

c) Selon les théories d'apprentissage du "behaviorisme", l'élève est restreint à un rôle passif. Il a la tâche d'absorber ou de mémoriser certains éléments de connaissance ou de comportement qui lui sont présentés à l'aide de mécanismes uniformisés d'enseignement qui s'approchent plus ou moins du modèle de stimulus - réponse. -L'assimilation, l'activité propre, l'orientation par des problèmes, la genèse de concepts sont des aspects qui sont complètement ignorés.

Il faut mentionner également que l'idée de l'opérationalisation d'objectifs d'apprentissage a été développée dans un

contexte de formation militaire et industrielle, contexte qui est caractérisé par une tout autre structure que celle de la mathématique.

Si l'on considère le "behaviorisme" d'une part et des approches génétiques d'autre part, on peut constater qu'il s'agit fondamentalement de deux positions philosophiques ou idéologiques différentes avec des conceptions fondamentalement différentes de l'homme et qui s'opposent déjà depuis des siècles.

Le "behaviorisme" est plongé dans la tradition de l'empirisme. Selon cette conception, les sciences exactes sont élaborées (explorées) par une abstraction immédiate d'une réalité objectivement donnée et observable. L'observateur empirique essaye d'éliminer toute influence subjective et d'enregistrer seulement des données objectives. Il est habitué à subir la réalité.

Dans la tradition de l'idéalisme de KANT, la relation entre l'individu et la réalité est conçue de manière fondamentalement différente. La théorie des connaissances de PIAGET en est un exemple. Selon cette conception, l'individu qui apprend est déjà équipé d'une structure cognitive. Il tâte la réalité à l'aide des schèmes déjà disponibles comme avec un projecteur. Ce n'est que par une telle interaction (dans laquelle l'activité de l'individu même joue un rôle important) que se révèle la réalité. Selon cette position, il y a donc une part importante qui revient à l'individu dans la conception de la réalité.

3. La méthode génétique.

3.1 Description.

"Une présentation d'une théorie mathématique est dite génétique, si elle est organisée (orientée) selon les processus naturels de la théorie des connaissances concernant la création et l'application de la mathématique."[1] Dans les sciences exactes (mathématique et sciences de la nature), les théories se développent lors de l'étude de problèmes par un raffinement de modèles simples. C'est pourquoi nous pouvons décrire la représentation génétique par les caractéristiques suivantes:

- -enchaînement dans la compréhension de celui qui apprend,
- -situation des réflexions particulières dans un contexte plus global de problèmes à l'intérieur ou à l'extérieur de la mathématique,
- -admissibilité d'introduire des concepts de manière informelle et intuitive selon le contexte de l'approche,
- -cheminement vers des réflexions rigoureuses à partir d'approches intuitives et heuristiques,
- -motivation permanente et continuité de pensée,
- -élargissement graduel du problème et changements de points de vue.

---

1 Voir [1] p. 97.

Des représentants renommés de la mathématique, de la didactique, de la pédagogie et de la psychologie ont fondé la méthode génétique; ils l'ont développée et défendue: F. KLEIN, O. TOEPLITZ, H. FREUDENTHAL, A.Z. KRYGOWSKA, A. WITTENBERG, M. WAGENSCHEIN, J. PIAGET, J.S. BRUNER, VAN HIELE, etc.

> "In good teaching one introduces new concepts, ideas, etc. by using them, one explains their rules of interaction with primitive elements one has assumed to exist, one makes them familiar through handling these rules. It is only later that one will be able to give the abstract definition which allows one to verify the consistency of the theory extended in this way. Mathematics, even in its most elaborate form, has never proceeded otherwise (except perhaps for certain gratuitous generalisations of algebraic theories)".
>
> R. THOM in HOWSON [1]

3.2 Trois points de vue de la mathématisation.

La description de la méthode génétique est nécessairement reliée au concept de structuration ou encore mieux de mathématisation. Considérant les activités impliquées dans de tels processus, on se rend compte d'une séparation graduelle entre la réalité d'une part et la mathématique d'autre part.

---

1 HOWSON, A.G., Developments in Mathematical Education, Prodeegings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge University Press, 1973.

Les impulsions pour développer davantage la mathématique peuvent venir de la réalité et de la mathématique. Ainsi on peut changer de point de vue pendant le processus de mathématisation concernant la réalité et la mathématique. Les points de vue suivants peuvent être caractérisés par des activités spécifiques:

(a) Création et développement d'instruments mathématiques.

L'étude de problèmes nouveaux de la réalité ou de la mathématique est au centre de l'activité de création ou de développement d'instruments mathématiques. Nous créons et développons un inventaire de concepts et de procédés (schèmes) et ainsi la structure cognitive de celui qui apprend est enrichie ou élargie. Ces instruments peuvent encore être enracinés dans le concret ou être formulés dans le contexte du problème. L'élève acquiert un inventaire riche et substantiel de connaissances, de procédés, de stratégies qu'il n'est probablement pas encore capable de décrire. Il est centré sur la solution du problème et il ne réfléchit pas encore sur les moyens qu'il utilise.

(b) Analyse structurale et conceptuelle
("abstraction réfléchissante")

Dans une activité d'analyse structurale et concep-

tuelle, le problème original ne se trouve qu'en arrière-plan. L'attention est dirigée plutôt vers l'inventaire d'instrume[illegible] dont on s'est servi en (a) et cette activité distance la réalité et la mathématique. On soumet des instruments à un processus de précision conceptuelle ou linguistique, d'abstraction, d'analyse structurale, de comparaison de structures en autant que l'élève en est capable.

La motivation (ou justification) de telles activités est l'économie de pensée et la maîtrise de la situation (de problème) par un aperçu global.

Dans les activités cognitives ultérieures, l'élève disposera de certains schèmes mathématiques élaborés qui comprennent déjà une série de situations (modèles) concrètes et qui sont ouverts à des interprétations nouvelles.

(c) Application

Des instruments ou des schèmes développés de manière plus ou moins précise dans (b) peuvent être appliqués à l'étude de problèmes particuliers dans des domaines connus ou nouveaux.

Remarque: Ces points de vue ne sont séparés ici que pour des fins de systématisation. En réalité, ils sont difficilement séparables et les frontières entre eux sont imprécises.

3.3 Le principe génétique.

La méthode génétique se distingue des deux autres méthodes de construction de séquences de situations d'apprentissage par le fait qu'elle tient compte explicitement de toutes les composantes caractéristiques de la philosophie de l'enseignement de la mathématique (voir 1.3, page 8), qu'elle permet de prendre en considération tous les objectifs généraux de l'enseignement de la mathématique et qu'elle est un accord avec les théories psychologiques d'apprentissage. On peut ainsi formuler le principe génétique:

L'enseignement de la mathématique doit être organisé selon la méthode génétique.

Puisque la méthode génétique intègre des points de vue mathématique, psychologique, pédagogique de même que les différents aspects de la théorie des connaissances, le principe génétique représente le grand cadre de l'activité de l'enseignant de la mathématique. Il devient ainsi le principe primordial d'une approche donnée. Plus particulièrement, le principe génétique représente une solution adéquate au problème de tenir compte d'une façon adaptée en même temps de la structure de la discipline (mathématique) et de la structure cognitive de l'élève.

3.4 Les relations entre les trois méthodes de construction de séquences de situations d'apprentissage.

Dans ce qui précède, la méthode de concrétisation de théories mathématiques ainsi que la méthode d'analyse d'objectifs ont été jugés de manière très négative. Il serait faux d'interpréter ces critiques de façon telle que ces méthodes soient considérées comme tout à fait non-pertinentes pour l'enseignement de la mathématique. Au contraire, les deux méthodes jouent un rôle important dans le cadre de la méthode génétique.

Des présentations axiomatiques de théories mathématiques forment l'étape terminal de processus génétiques; elles font alors partie du processus génétique. Même PIAGET a répété à maintes reprises que la forme axiomatique de la mathématique représente la forme suprême d'équilibre de l'intelligence. En effet, la structure de la mathématique apparaît de la manière la plus pure dans des représentations axiomatiques de la "mathématique moderne". L'économie de pensée y est très évidente et l'intégration des diverses disciplines dans l'édifice de la mathématique y est réalisée de façon optimale.

La méthode génétique vise ce but terminal de toute formation mathématique par les principes subordonnés de l'orientation par la structure et de l'enseignement en spirale. Plus particulièrement, elle intègre la méthode de concrétisation de théories mathématiques en concevant des séquences d'apprentissage stimulant des processus d'axiomatisation dans des contextes particuliers (voir les activités d'étude de plans affines finis).

L'intégration de l'opérationalisation d'objectifs dans le cadre génétique est possible si l'on restreint cette opérationalisation à des connaissances et à des techniques qui peuvent être opérationnalisées. Seule la conception totale de l'enseignement de la mathématique dans la perspective du behaviorisme ne rend justice ni à la machématique en tant que science, ni à l'apprentissage et au développement global de l'être humain.

Ainsi, l'enseignement génétique (c'est-à-dire l'enseignement organisé selon le principe génétique) peut englober au moins partiellement la plupart des diverses philosophies de l'enseignement. Un tel enseignement comportera certainement des phases où l'élève élaborera lui-même, seul ou de manière guidée, des contenus conceptuels particuliers. Cependant, on y trouvera aussi des situations où l'élève suivra rigoureusement le cheminement de pensée d'un autre (par exemple selon la méthode du "meaningful verbal learning"[1]). Ce qui est essentiel c'est la compréhension maximal de l'élève. Les élèves sont, heureusement, capables d'appréhender des contenus qu'ils ne pourraient jamais élaborer tout seul. Ceci concerne surtout des objets complexes et abstraits et un développement mental plus avancé de l'élève. Ainsi, même l'instruction pure a sa place dans l'enseignement génétique en tant que variation ou graduation de moyens d'apprentissage. L'appréciation, l'appréhension et le développement des connaissances d'autres personnes sont inclus dans les buts visés par un enseignement génétique.

---

1 AUSUBEL, D. Psychology of Meaningful Verbal Learning, New York, 1963.

A propos du rôle des principes dans la didactique de la mathématique.

par

ERICH WITTMANN

Paedogogische Hochschule, Dortmund.

Traduction: D. Lunkenbein et L. Morcos.

Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences
Département de Mathématique, Section enseignement.

Hiver 1976

A propos du rôle des principes dans la didactique de la mathématique.

L'énonciation et l'application de principes est une habitude chère à la pédagogie et à la didactique. Des exemples bien connus des siècles passés sont le "Principe de la conformité à la nature" de COMENIUS, le "Principe de l'observation" de PESTALOZZI et les "Règles et lois didactiques" de DIESTERWEG (DIESTERWEG 1970).

Plus récemment, KARASCHEWSKI (1966) a établi un système complexe et cohérent de principes (axiomes ou postulats respectivement) pour l'enseignement de la mathématique dans l'optique d'un apprentissage intégral. Son système est probablement le meilleur et le plus différencié qui existe actuellement à l'intérieur de la didactique de la mathématique.

A plusieurs reprises, des principes didactiques ont été introduits dans la didactique de la mathématique moderne, comme par exemple le principe opératoire de AEBLI et FRICKE, ou les principes de DIENES.

J'ai pris moi-même cette habitude et j'ai établi le système suivant de principes didactiques (WITTMANN 1974 a):

Le principe génétique, le principe de l'orientation par la structure, le principe de l'enseignement en spirale, le principe de l'apprentissage anticipé, le principe de la continuation, le principe de la préfiguration, le principe du transfer intermodal, le principe de variation (principe de contraste - méthode de modèles multiples), le principe de la variation du matériel d'illustration,

le principe de l'orientation de l'élève, le principe de l'apprentissage actif (principe dynamique), le principe de la redondance, le principe de l'intégration, le principe de la stabilisation, le principe opératoire, etc.

Dans un essai intitulé "Réflexions à propos de la didactique de la mathématique en tant que science" (GRIESEL 1974, p. 117), Griesel a décrit des principes didactiques comme suit:

> "Le didacticien de la mathématique peut suivre certaines règles générales dont l'expérience a montré que leur application garantit un enseignement optimal, quand il prépare des curricula, et tout particulièrement au moment de l'établissement des séquences dans l'apprentissage. C'est ces principes là qu'on qualifie aujourd'hui généralement de didactiques."

Des principes didactiques sont donc des règles constructives. Il suit de là que des principes didactiques peuvent être de nature normative, empirique ou mixte, puisque des normes aussi bien que des résultats empiriques entrent dans la construction de modèles d'enseignement.

Du moment où la didactique prétend au statut d'une science, les principes didactiques posent un problème fondamental qui fait l'objet de notre propos. J'ai pris conscience de cette problématique l'année dernière lors d'une conférence à Bielefeld où j'avais employé le principe opératoire, quand BAUERSFELD doutait dans la discussion qui suivit, de la légitimité de mon procédé.

Le coeur de la problématique à laquelle BAUERSFELD avait touché et qui sera traitée ici, réside dans la question d'après le statut méthodologique des principes didactiques. Il va de soi, que la question ne sera traitée ici qu'en référence à la mothédologie de la didactique de la mathématique. Je me fonderai sur une méthodologie qui est dérivée de la conception de la didactique de la mathématique comme une science appliquée[1]. Dans la première partie, j'esquisserai le profile de cette méthodologie.

Qu'on me permette encore une remarque préliminaire. Je ne voudrais pas donner l'impression d'avoir l'intention ou la légèreté de présenter comme trivial le problème méthodologique de la didactique de la mathématique et la crise d'identité qu'il a causé. Les conceptions contradictoires, ou qui paraissent contradictoires telles qu'elles ont été formulées récemment dans le Zentralblatt für Didaktik der Mathematik au sujet de "Sens et signification de la didactique de la mathématique" (cf. ZDM 74/3, 109-132), sont bien présentes à mon esprit. Il ne faut toutefois pas, avec certaines restrictions, en tirer des conclusions erronnées. Vu la complexité énorme des questions théoriques et pratiques de la didactique, et ses connexions multiples avec différentes sciences-ressources, il n'est pas étonnant de voir les différents théoriciens orienter leurs conceptions différemment.

---

1. Par science appliquée l'auteur comprend des sciences comme le génie.

En fin de compte, ce sera tout à l'avantage de la didactique si du travail se fait dans des directions différentes - dans des optiques différentes - pourvu qu'on observe vis-à-vis des autres toute la libéralité et la tolérance qui est de mise surtout à ce stade du développement de la didactique. C'est dans ce sens que je voudrais présenter ma conception de la didactique de la mathématique comme une science appliquée.[1]

1. A propos de la méthodologie de la didactique de la mathématique.

Nous pouvons prendre comme acquis par consensus général aujourd'hui que la didactique de la mathématique est une science interdisciplinaire qui s'établit sur plusieurs sciences-ressources et dont l'objectif est l'innovation continue de l'enseignement de la mathématique (référence à l'application). Contrairement aux sciences-ressources, la didactique de la mathématique est essentiellement constructive dans sa nature, me semble-t-il, comme cela se manifeste dans l'élaboration de cours ainsi que du matériel et dans l'établissement de programmes d'étude; voilà ce qui m'amène à considérer, avec certaines restrictions, la didactique de la mathématique comme une science appliquée.

---

1. Voir aussi E. WITTMANN 1974 b).

Pour définir notre cadre méthodologique nous trouvons une aide précieuse dans la métathéorie que BREZINKA a développée pour les sciences de l'éducation, qu'on peut modifier de façon à tenir compte du caractère constructif de la didactique de la mathématique. C'est ainsi que nous avons tracé l'organigramme de la fig. 1. A l'intérieur de ce cadre, trois domaines de travail didactique ont été délimités et reliés, à savoir, la "construction" de modèles d'enseignement, la théorie et les données empiriques y compris la philosophie de l'éducation et enfin des règles pratiques d'enseignement. Les deux premiers domaines mettent à la disposition de l'enseignement de la mathématique une foule d'idées et de possibilités qui rivalisent sur différents points (par exemple, en ce qui concerne leurs objectifs) et dont une petite partie seulement aura été mise à l'épreuve par l'expérience pratique. Il est entendu que la didactique de la mathématique ne doit pas présenter directement ces deux secteurs aux enseignants, si elle veut leur rendre le meilleur service possible, mais qu'elle doit développer des règles pratiques d'enseignement après avoir décidé des objectifs, des contenus et des procédés pédagogiques.[1] De telles décisions ne peuvent pas attendre jusqu'à ce qu'on ait accumulé assez d'informations dont la validité a été confirmée par l'expérience, puisqu'il s'agit d'enseigner pratiquement ici maintenant.

---

1. Voir aussi WAGEMANN (1973/74).

C'est pourquoi il est légitime de prendre en considération les résultats de l'expérience pratique quand on élabore des règles pédagogiques pratiques. Cette situation a été analysée très clairement par GRIESEL (1974, p. 117), ce qui me permet de faire ici l'économie de sa description.

Des règles pratiques d'enseignement auront donc nécessairement un caractère intuitif et subjectif, et elles changeront avec le temps et la mode. C'est le prix - si prix il y a - qu'on paie pour leur disponibilité à court terme et leur praticabilité.

Ici aussi, il y aurait lieu d'intercaler une remarque pour dissiper l'impression éventuelle que j'emploie le concept de science à la légère. Il faut dire, qu'il serait en effet hasardeux de vouloir fonder la prétention à la scientificité de la didactique sur des règles pratiques pour l'enseignement. Par contre, le domaine "théories et résultats empiriques" répondent aux critères de scientificité, car on peut y travailler largement sur le modèle de la psychologie expérimentale et des sciences de l'éducation. Je considère encore comme plus importante l'activité qui tient du travail de génie (travail de l'ingénieur) quand il s'agit de construire, d'inventer des modèles d'enseignement, de les mettre à l'épreuve et d'y apporter des améliorations successives. Il ne s'agit pas ici, comme dans les sciences naturelles d'observer et d'analyser des phénomènes de la nature, mais de porter la recherche sur des objets artificiels (modèles) en vue d'améliorer leur fonctionnement. SIMON parle dans ce contexte précisément des "sciences de l'artificiel" - "sciences of the artificial" et décrit en détail leur méthodologie dans SIMON 1969.

Domaines d'activités de la didactique de la mathématique.

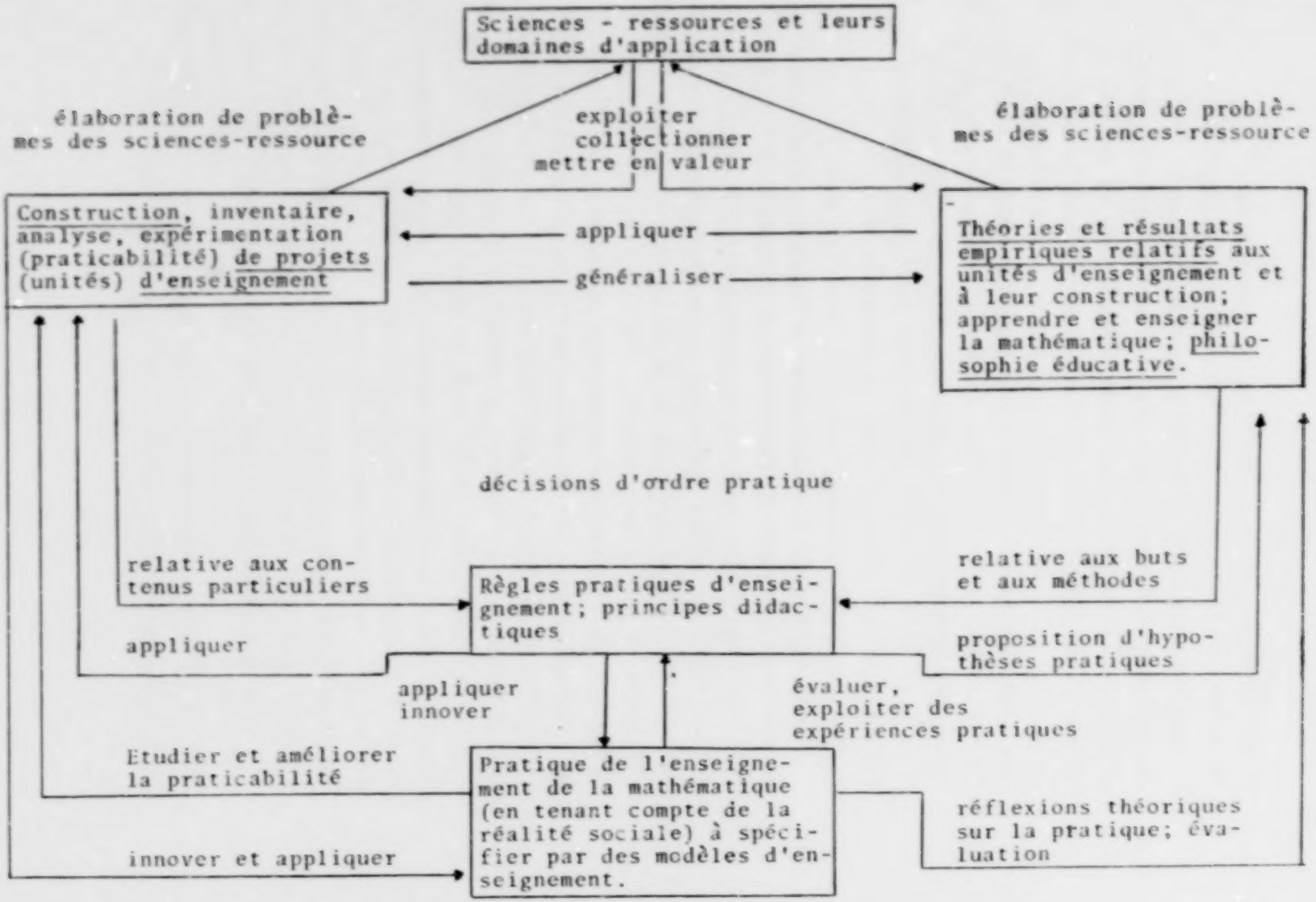


Figure 1

On dira donc, avec certaines restrictions faites, que l'inclusion dans la didactique de la mathématique de règles d'enseignement pratiques est conciliable avec le caractère scientifique de la didactique, du moment où on prévoit l'isolement méthodologique des règles pratiques pour l'enseignement, comme on l'a fait plus haut.

2. A propos du rôle que jouent les principes dans la didactique.

En nous référant à ce qui précède, nous pouvons maintenant répondre à la question d'après le statut méthodologique des principes de la didactique:

Les principes didactiques sont des règles constructives dans le cadre d'une rationalisation de la réalité de l'enseignement.

On a ainsi délimité exactement le terrain où les principes didactiques sont admissibles. L'emploi de principes didactiques à l'intérieur d'une rationalisation de l'enseignement est justifié parce qu'ils sont d'une utilité réelle, à des points de vue différents, pour le travail en didactique et pour le travail en formation des maîtres, comme nous allons démontrer dans ce qui suit.

2.1. Une méthode pratique d'enseignement ("conception didactique") peut se résumer pertinemment en un ensemble de principes didactiques appropriés.

Exemple. Dans la conception didactique développée par Wittmann (1974 a), le principe génétique est le postulat didactique dominant.

En fonction de ce principe, l'enseignement de la mathématique part de situations de problèmes dans le domaine de la mathématique et en dehors de ce domaine; il conçoit la mathématique et ses applications comme une unité; et il tient compte du développement général des destinataires. Sur le principe génétique se greffe celui d'une synthèse de la concentration sur l'objet (structure du contenu) et sur le sujet, l'élève. Ces deux pôles de l'attention sont visés par le principe de l'orientation par la structure et l'orientation vers l'élève. D'autres principes encore, comme celui de l'enseignement en spirale, et ses sous-principes indiquent des solutions adéquates pour concilier ces deux tendances apparemment opposées. Etc...
Ces considérations générales pourraient être illustrées à l'aide d'exemples appropriés.

2.2 L'emploi de principes didactiques permet une explication et une description économiques de procédés didactiques particuliers.

Exemple: Le principe d'enseignement en spirale. Une application classique du principe d'enseignement en spirale dans la didactique traditionnelle du calcul c'est le traitement du calcul avec des fractions sur trois niveaux (OEHL, 1965, pp. 146-148).

> Il y a des innovations didactiques importantes qui relèvent du principe de spirale, comme par exemple la présentation de la géométrie qui commence avec le jeu géométrique préparatoire, la présentation en spirale de l'algèbre (cf. KAUFMANN/STEINER, 1969, p. 445), la présentation en spirale de la stochastique etc... On l'applique encore quand on cherche à démontrer les seuils qu'on rencontre habituellement dans l'acquisition des nombres, et qui consiste à employer des chiffres librement bien avant leur thématisation (comme nombres) (par exemple, des chiffres pendant la phase prénumérique, de "grands" chiffres au tout début de l'enseignement du calcul, des fractions et des nombres négatifs pendant le premier cycle de l'école primaire.)

Lors de conférences sur des sujets didactiques spécifiques, l'énonciation de principes didactiques permettent, d'après mon expérience, d'introduire les points de vue généraux nécessaires sans empiéter sur le domaine des réflexions mathématiques du contenu.

2.3. Un système de principes didactiques constitue un guide pratique dans l'élaboration d'unités d'enseignement.

A ce propos on voudrait référer le lecteur à WITTMANN (1974 a), 11, où l'on propose un cadre pour la planification de l'enseignement, qui est fondé sur l'ensemble de principes didactiques mentionnés dans l'introduction.

2.4. Les principes didactiques comme source d'enrichissement de projets d'enseignement.

Exemple: Le principe d'intégration et le principe de stabilisation. Le cercle à neuf points de Feuerbach se prête très bien à ce point de vue dans un cours de géométrie, pour assurer la stabilisation et l'intégration des théorèmes du triangle et du rectangle. COXETER en fournit une démonstration (1963, p. 34) où il inclut plusieurs fois les théorèmes relatifs à la parallèle médiane du triangle, aux angles de droites parallèles, à l'existence du cercle qui circonscrit un rectangle et au théorème de Thales.

2.5. Les principes didactiques suggèrent à la recherche empirique des hypothèses qui s'avèrent fertiles dans l'expérimentation pratique.

Le didacticien et pédagogue russe, ZANKOV, considère cet aspect comme primordial pour la recherche et en parle dans ces termes (ZANKOV, 1973, p. 132-133):

> "On ne mettra guère en doute le bien-fondé du fait de donner des indications pratiques pour le travail dans l'éducation et dans l'enseignement dans des manuels de pédagogie et les publications de recherche. Leur importance dépend toutefois essentiellement du type de recommandations et de leur explication.

L'importance des lignes de conduite généralement acceptées, comme par exemple le principe d'une acquisition lucide de la matière enseignée ou le principe de la "présentation figurée", ne saurait être niée. Chacune de ces thèses détermine une orientation, que l'enseignant conservera dans sa pratique quotidienne. En se soumettant ainsi à une orientation, un certain nombre de questions vont se poser à lui concernant par exemple l'adaptation du principe de la présentation figurée à l'âge de l'élève, à la matière qu'on veut enseigner, à un objectif didactique donné etc...

Pour pouvoir appliquer des principes d'enseignement (didactiques) correctement et avec le meilleur succès, il faut avoir saisi, par quels moyens on peut atteindre un résultat donné en appliquant un certain principe. En partant de ces réflexions, on peut élaborer des méthodes et des procédés pour l'enseignement, qui tiennent compte du caractère particulier d'un projet didactique et de la matière à enseigner, de l'âge de l'élève etc... Dans le cas contraire, tout le travail d'arriver à une application rationnelle de thèse pédagogiques générales en classe incombe à l'enseignant."

J'aimerais maintenant donner quelques exemples qui illustreront ces réflexions générales.

Du point de vue de la psychologie de Piaget, on pourrait formuler le principe opératoire comme suit (WITTMANN, 1974 a, p. 61):

> "Le but à atteindre est d'inciter l'élève à organiser en groupements les opérations qui découlent des actions (par intériorisation)."

Le principe opératoire est beaucoup employé dans l'enseignement de l'arithmétique, et, en général, avec succès.[1] Ceci n'a toutefois pas encore fournit une clef pour trouver la meilleure façon de faire la relation entre une composition et son inverse. Selon la conception de FRICKE/BESUDEN et celle de ERDNIEV (ZANKOV 1973, p. 98), il faut attacher une grande importance à l'apprentissage simultané de l'addition et de la soustraction. Cette intention se lit par exemple chez FRICKE/BESUDEN et aussi chez ERDNIEV, quand ils groupent les problèmes par affinité - en fonction d'une affinité (problème, problème alternatif, problème de vérification). Ce procédé chez FRICKE/BESUDEN a été critiqué par GRIESEL/HOLLMANN (1969, p. 34) comme suit:

> "On peut bien se demander, si ce genre d'enseignement ne déplace pas simplement l'automatisme et qu'on le rencontre alors à un niveau plus élevé, celui des rapports entre le type de problèmes. L'expérience montre que le passage au problème alternatif ou au problème de vérification se fait d'une façon tout à fait automatique de la part de l'élève, et même la recherche d'autres solutions possibles emprunte automatiquement les voies bien aplanies du déjà vu."

---

1. Note: A ce sujet, on dispose de résultats pratiques obtenus en Union Soviétique. Cf. ZANKOV (1973, p. 97): "L'expérience nous a appris que l'apprentissage simultané d'opérations avec leur inverse représente certains avantages sur l'acquisition indépendantes de chacune de ces opérations."

ZANKOV exprime une réserve semblable à l'égard du procédé de ERDNIEV.

Le principe opératoire, comme il a été formulé plus haut, permet encore d'autres applications possibles. On pourrait, par exemple, mettre en veilleuse la relation entre les compositions isolées pendant qu'on pratique celle-ci une à une en classe, pour reprendre après coup ce qu'elles ont en commun, ce qui revient à appliquer le principe d'intégration. DAHLKE (1974) a mené sur ce point une recherche empirique et il a trouvé, que parmi les cours choisis par lui, celui qui consacrait un certain temps à l'exercice de compositions isolées avait produit les meilleurs résultats. Cet effet est intéressant et devrait provoquer d'autres recherches dans cette direction. La recherche empirique sur les principes didactiques constitue une fonction essentielle dans le cadre méthodologique de la figure 1, et elle constitue une des désidérata les plus importantes dans la didactique de la mathématique.

Les réflexions précédentes montrent donc, que les principes didactiques sont reliés étroitement à des questions particulières aussi bien générales dans le domaine de la didactique, qu'ils ont une incidence sur la théorie aussi bien que sur la pratique et qu'il leur revient ainsi une fonction synthétisante.

B I B L I O G R A P H I E

BREZINKA, W.,	Von der Pädagogik zur Erziehungswissenschaft, Weinheim 1971.
COXETER, H.S.M.,	Unvergängliche Geometrie, Basel und Stuttgart 1963.
DAHLKE, E.,	Zur vermeidung negativen Transfers beim Lernen ähnlicher Aufgabenklassen, Diss. TU Braunschwig 1974.
DIESTERWEG, F.,	Didaktische Regeln und Gesetze, Heidelberg 1970.
GRIESEL, H.,	Uberlegungen zur Didaktik der Mathematik als Wissenschaft, ZDM 74/3, 115-119.
GRIESEL, H. und HOLLMANN, E.,	Eine mathematisch-didaktische Analyse dreier Erstrechenkurse, ZDM 2/69, 32-39.
KARASCHEWSKI,H.,	Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, Stuttgart 1966.
KAUFMAN, B.A./ STEINER, H.G.,	Checker Games in Operational Systems as Media for an Inductive Approach to Teaching Algebra, Educational Studies in Mathematics vol. 1, No. 4 (1969), 445-483.
OEHL, W.,	Der Rechenunterricht in der Hauptschule, Hannover 1965.

SIMON, H.,	The Sciences of the Artificial, Cambridge (Mass.) and London: The M.I.T. Press 1969.
WAGEMAN, E.B.,	Einige Gedanken für die theoretische Grundlegung einer Unterrichtslehre zym Mathematikunterricht, Unv. Manuskr. eines Vortrages im Seminar für Didaktik der Mathematik der Univ. GieBen, WS 73/74.
WITTMANN, E.,	Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974 a.
WITTMANN, E.,	Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft, ZDM 74/3, 119-121 (1974 b).
ZANKOV, L.V.,	Didaktik und Leben, (Übers. aus dem Russ.) Hannover 1973.

Une extension du principe opératoire

par

Erich Wittmann

Paedagogische Hochschule, Dortmund

Traduction: D. Lunkenbein et L. Morcos

Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences
Département de mathématiques, Section enseignement

Hiver 1976

Erich Wittmann:

Une extension du principe opératoire.

Introduction.

La mise en valeur des découvertes fondamentales de la psychologie de J. Piaget dans l'enseignement de la mathématique constitue sans doute un progrès important de la didactique de la mathématique. Au cours d'une évolution qui s'étend sur 25 années, et dont l'initiateur en 1951 était Hans Aebli, sous l'influence de Piaget (AEBLI 1963), il y a eu surtout Arnold Fricke et Wilhelm Oehl, qui ont élaboré la méthode opératoire pour son application dans l'enseignement de l'arithmétique. Ces travaux ont donné aux concepts d'Aebli ("traitement global opératoire", "exercice opératoire" entre autres) dans ce cadre un contenu concret pour la didactique de la mathématique. (cf. le résumé dans FRICKE-BESUDEN 1970 et OEHL 1970). Schwirtz, un élève de W. Oehl, a ensuite appliqué la méthode opératoire à l'enseignement de la géométrie et il a démontré son affinité avec l'approche moderne de la géométrie par les transformations. (SCHWIRTZ, 1969, PAEZKILL-SCHWIRTZ 1971).

Les différentes propositions didactiques, qui ont été développées jusqu'ici dans le cadre de la méthode opératoire, peuvent se subsumer pour l'essentiel sous la formulation suivante du principe opératoire:

> "Il faut viser à initier l'organisation en groupements des opérations qui dérivent des actions par l'intériorisation."
> (WITTMANN 1974, p. 61).

Il faut ici comprendre sous groupement un arrangement en système d'opérations; la mobilité et la flexibilité de leur organisation s'expriment dans les propriétés des groupements comme la "possibilité de composition", la "réversibilité", l' "associativité" et la "reproductibilité". (PIAGET 1967, p. 38-48). Il est à noter que le concept de groupement chez Piaget fait ressortir, encore dans la formulation ci-haut du principe opératoire, exclusivement l'aspect des opérations et de leur organisation. Par contre, des recherches plus récentes, dont l'objectif fut d'abord (WITTMANN 1973, 1975) de débarasser la conception du groupement de ses contradictions formelles, ont abouti à une formulation de ce concept qui ouvre des perspectives psychologiques et didactiques nouvelles. Dans cette nouvelle conception, le groupement contient des éléments statiques, des états, aussi bien que des éléments dynamiques, à savoir des opérations qui permettent les transformations d'un état en un autre. Des opérations peuvent être composées, si l'état terminal d'une première est en même temps l'état initial d'une deuxième. Cette composition est associative. Il existe, pour chaque opération, son inverse (réversibilité). Une opération composée avec son inverse constituent une opération identique. L'application d'opérations indentiques reproduit les états donnés. Un exemple typique est fourni par les états et les "opérateurs" du groupement des fractions.

Une compréhension approfondie de la méthode opératoire et une conception élargie du principe opératoire résultent du fait qu'on considérera, dans ce qui suit, non seulement la composition d'opérations mais aussi "l'effet" des opérations sur les propriétés d'états ou sur les relations entre états, respectivement.

1. Conception élargie du principe opératoire.

La voie, par laquelle on peut obtenir une formulation plus englobante du principe opératoire est un exemple de l'abstraction typique, à savoir de cette "abstraction qui dérive des actions" (abstraction réfléchissante), à laquelle Piaget reconnaît un rôle central dans sa psychologie. Nous prendrons comme point de départ le traitement opératoire de quelques exemples. Et ce ne sera que par après qu'on en déduira le trait ou le caractère ou l'aspect abstrait ("schématique") de ce traitement pour établir un schème cognitif, qui permettra l'identification d'autres exemples.

a)- L'aire de polygones (cf. WITTMANN 1974, p. 60)

Les états du groupement auquel nous avons affaire ici, sont les polygones. Les opérations du groupements sont engendrées par les schémas opératoires "refléter", "tourner", "translater", "dilater", "comprimer", "cisailler", "refléter obliquement", "élargir", "réduire", "décomposer" et "composer". En ce qui concerne l'aire, il ne s'agit maintenant pas seulement de pouvoir exécuter les opérations de façon mobile et flexible mais de pouvoir suivre le comportement de l'aire lors de l'application des opérations. Les connaissances pertinentes à cet effet sont:

- L'additivité de l'aire dans la composition,
- la monotonie de l'aire dans l'élargissement,
- l'invariance de l'aire lors d'isométries,
- l'invariance de l'aire lors de cisaillements,
- la multiplication de l'aire avec /D/ lors d'une transformation affine de la déterminante D,
- l'invariance du rapport des aires lors de transformations affines.

b)- Pair - impair (cf. KOCH, 1974, p. 68 sq.)

Cet exemple est pris dans la thèse de Christiane Koch. L'objet est le groupement des nombres compteurs (nombres de comptage) des nombres naturels, dont les états représentent les nombres naturels, et dont les opérations sont engendrées par le schéma opératoire "un de plus".

Les états peuvent être classifiés selon les propriétés "pair" et "impair". On est porté à explorer comment l'appartenance à une classe change lorsqu'on applique une opération à un nombre (ou lorsqu'on emploie un opérateur). On arrive à la conclusion:

Dans la situation $n \xrightarrow{+1} k$

k est impair, quand n est pair, et vice-versa.

D'une manière plus générale:

Dans la situation $n \xrightarrow{+m} k$

k est impair, lorsque n est pair et m est impair, ou si n est impair et m est pair.

k est pair, lorsque n est pair et m est pair, ou bien si n est impair et m est impair.

c)- Le théorème d'EULER pour les polyèdres.
(cf. par exemple ARNOLD, 1964, p. 50-57)

Le théorème d'Euler dit: Si S, A et F sont les nombres de sommets d'arêtes et de faces d'une carte géographique plane et connexe , il est postulé que S - A + F = 2.

La preuve classique peut s'interpréter facilement de manière opératoire. Nous considérons le groupement, dont les états représentent les cartes géographiques planes et connexes , et dont les opérations sont engendrées par le schème opératoire "élargir une carte géographique ". Il est évident qu'une carte géographique permet les quatre élargissements élémentaires suivants:

1) On ajoute une arête nouvelle à un sommet déjà existant, et un nouveau sommet à la deuxième extrémité de cette arête.

2) On ajoute une nouvelle arête en rattachant ses deux extrémités à un sommet déjà existant.

3) On ajoute une nouvelle arête en la rattachant à deux dommets déjà existants.

4) On indique un nouveau sommet sur une arête déjà existante. Cette arête est alors partagée en deux de la nouvelle carte.

Il est bien évident que n'importe quelle carte géographique se laisse produire à partir de la carte triviale qui consiste en un seul sommet.

Si l'on observe alors les nombres de S, A et F arrangés sous forme de tableau, on arrive aux données suivantes:

$$(S, F, A) \xrightarrow{(1)} (S + 1, F, A + 1)$$

$$(S, F, A) \xrightarrow{(2)} (S , F + 1, A + 1)$$

$$(S, F, A) \xrightarrow{(3)} (S, F + 1, A + 1)$$

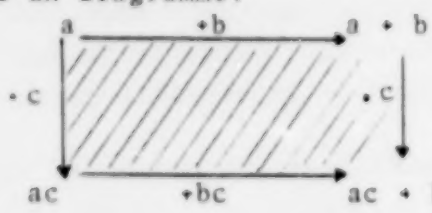
$$(S, F, A) \xrightarrow{(4)} (S + 1, F, A + 1).$$

Autrement dit, à chaque pas, S + F augmente de 1 comme aussi A, c'est-à-dire que la différence S + F - A reste constante. Comme pour la carte triviale cette constante revient à 1 + 1 - 0 = 2, la validité de la relation S+ F - A = 2 est alors générale.

d)- La loi distributive.

Dans l'ensemble des nombres entiers on définit deux groupements canoniques: le groupement additif et le groupement multiplicatif. Il est naturel de se demander ce qui arrive si l'on applique pèle-mêle les opérations additive et multiplicative.

Le résultat (loi distributive) peut être représenté sous forme d'un diagramme:



Un diagramme analogue où les rôles de + et de . serait en échangés, n'existe pas.

Le schème illustré par les exemples peut très bien être saisi à l'aide d'un concept qui a une signification bien précise dans la mathématique structurelle. On appelle compatibles des données différnetes, s et s', d'une structure, s'il existe une relation (non-triviale) générale entre elles.

Exemples:

Données	Relation de compatibilité
Composition dans un anneau	loi distributive
Addition + et relation $\leq$ dans un corps ordonné	loi de monotonie
Composition et topologie dans un groupe topologique	continuité de la composition et de la formation des inverses.

Un autre mode de compatibilité peut exister dans le cas d'une transformation φ d'une structure S dans une structure homologique S'. On appelle φ compatible avec les données de S (en bref: compatible avec la structure S) ou on parle de (homo) morphisme, si φ transpose les relations structurelles de S en S' en respectant la structure.
Des exemples dans ce sens sont fournis par les proportions de dimensions de grandeur, les homomorphismes de groupes, d'anneaux, etc, les transformations continues d'espaces topologiques etc.

Dans un sens analogue, on montre dans les exemples cités plus-haut des compatibilités entre propriétés ou relations ou fonctions respectivement propres aux états d'un groupement d'une part et d'autre part des opérations, ainsi que des compatibilités entre les opérations appartenant à des groupements différents du même ensemble d'états (cf. loi distributive en tant que compatibilité entre les opérations additive et multiplicative des nombres naturels).

Il nous est alors possible de formuler le principe opératoire sous sa forme élargie:

> Il faut chercher à organiser en groupements les opérations engendrées par les schèmes opératoires, et à faire ressortir les compatibilités existant entre des propriétés, les relations et les fonctions des états d'une part et les opérations du groupement d'autre part, ainsi qu'entre les opérations de groupements différents.

Exprimé d'une façon plus simple, le principe opératoire demande de l'enseignant, de se poser et de poser aux élèves les questions suivantes:

> "Quels sont les états et quelles sont les opérations impliquées, et quelles relations existent entre eux?
>
> "Qu'est-ce qui arrive à ..., si ... ?"
> (cf. SZEMINSKA, 1965, P.617).

Ceci provoque presque immédiatement des activités heuristiques. (cf. aussi FRICKE-BESUDEN 1970, p. 96-104). D'abord, la question "Qu'est-ce qui arrive, si ...?" représente une stratégie fondamentale pour inciter à la découverte de compatibilités (et il serait souhaitable que les élèves finissent par l'adopter et l'intérioriser); et puis, les informations concernant la composition d'opérations et les compatibilités fournissent des indices heuristiques sur les méthodes (voies) d'approche à choisir pour la résolution d'un problème donné.

2. Quelques applications du principe opératoire.

Comme on l'avait déjà mentionné sous 1), il faut comprendre la conception élargie du principe opératoire comme un schème cognitif qui incite à la recherche d'exemples de sa réalisation. La direction à prendre est claire: Les exemples possibles (assimilable au schème sont tout au plus ceux qui comportent une structure de groupement ou qu'on peut concevoir comme un groupement.

Dans ce qui suit, on apportera trois exemples plus importants tirés de l'enseignement traditionnel qu'on traitera du point de vue opératoire. L'exemple de la géométrie donnera plus particulièrement lieu à des considérations parallèles entre la psychologie et la mathématique, et jettera une lumière nouvelle sur les méthodes traditionnelles.

2.1. Géométrie par les transformations et géométrie traditionnelle d'Euclid.

Un des principes méthodologiques fondamentaux en géométrie, qui a exercé une influence décisive au XIX et XX siècle sur le développement de la géométrie et de la mathématique en général, a été le Programme d'Erlangen formulé en 1872 par F. Klein. Sous une forme réduite, il s'énonce comme suit: Soit un espace et un groupe de transformations de cet espace. Il faut examiner les objets dans cet espace concernant les propriétés qui sont invariantes par rapports aux transformations du groupe.

C'est sur la base du Programme d'Erlangen - et en accord avec les suggestions de Klein lui-même - que la méthode de la géométrie par les transformations a été élaborée dans les années cinquante et soixante, qui a influencé l'enseignement de la mathématique de manière décisive.

Nous voulons démontrer qu'il existe une correspondance naturelle entre le programme de Klein et la géométrie de transformations d'un côté et le principe opératoire de l'autre. Nous construisons à cette fin le groupement dit de Klein. Nous définissons comme éléments statiques (états) du groupement les figures dans le plan (que nous pouvons considérer dans une certaine mesure comme des ensembles de points). Les éléments dynamiques du groupements, c'est-à-dire les opérations, sont produits par les transformations d'un groupe de transformation donné dans le plan, en interprétant comme opérations les restrictions des transformations à ces figures. Chaque opération comprend alors une figure de départ et une figure d'arrivée bien déterminée.

Si nous employons les symboles α, β, γ... pour les figures, et les symboles f, g, h, ... pour les opérations, nous écrivons les propriétés de Piaget comme suit:

(1) Si f est une opération dont α est la figure de départ, β la figure d'arrivée et g une opération, dont β est la figure de départ et γ la figure d'arrivée, la composition f o g est une opération dont la fugure de départ est α et la figure d'arrivée γ. (Possibilité de composition).

(2) La composition partielle décrite en (1) est associative.

(3) Pour chaque figure α il y a une opération identique id_α, ce qui permet de dire: $\alpha\ id_\alpha = \alpha$ (possibilité de fixation)

(4) Pour chaque opération f avec la figure de départ α et la figure d'arrivée β on a une opération unique f^{-1} dont la figure de départ est β et la figure d'arrivée α, ce qui s'écrit:
(Réversibilité) $f \circ f^{-1} = id_\alpha$, $f^{-1} \circ f = id_\beta$

On voit donc que les quatre propriétés du groupement, la possibilité de composition, l'associativité, la possibilité de fixation et la réversibilité correspondent exactement au quatre propriétés canoniques d'un groupe.

Contrairement au procédé suivi plus haut pour développer le "groupement de Klein" en partant d'un groupe, les opérations du groupements précèdent en psychogénèse les transformations. Les transformations apparaissent quand les opérations sont appliquées au-delà de leur domaine de définition (i.e. une figure) et étendues sur tout le plan.

Après ces remarques préliminaires on pourra discuter chaque pas de procédé qui constitue une application du principe opératoire. La première partie de son énonciation incite à faire subir aux figures des opérations de différentes manières, de mettre en série les opérations de manières variées, de les inverser etc. Tout ceci est entendu par l'expression clef de "rendre les figures mobiles" ou bien par une application explicite de la méthode opératoire (PALZKILL/ SCHWIRTZ 1970) p. 16 sq.) et est déjà chose bien établie dans la didactique et dans l'enseignement de la mathématique.

La deuxième proposition du principe opératoire exige un procédé qui correspond, par sa tendance, parfaitement au Programme d'Erlangen. Mais le principe opératoire dépasse le programme d'ERLANGEN en ce qui concerne son contenu, puisqu'il ne considère pas seulement des propriétés mais aussi des relations et des fonctions, et parce qu'il élargit la perspective des invariances aux compatibilités. Les tableaux déjà connus où on a enregistré les compatibilités de différents types de transformations avec les propriétés géométriques, etc., peuvent alors être motivés dans l'optique du principe opéraotire et ils peuvent être exploités en classe en posant la question "Qu'est-ce qui se passe ..., si ...?"

La stratégie heuristique recommandée pour l'application du principe opératoire au "groupement de Klein" a été explicité indépendemment par K.H. HUERTEN (HUERTEN 1970) et peut se résumer dans la formule:

Essaye de transformer des figures de façon adéquate!

Pour illustrer la méthode de la géométrie des transformations nous esquissons ici la preuve de la proposition concernant la colinéarité du point de gravité S, du point d'intersection des médiatrices M et du point d'intersection H des hauteurs du triangle ABC (cf. fig. 1).

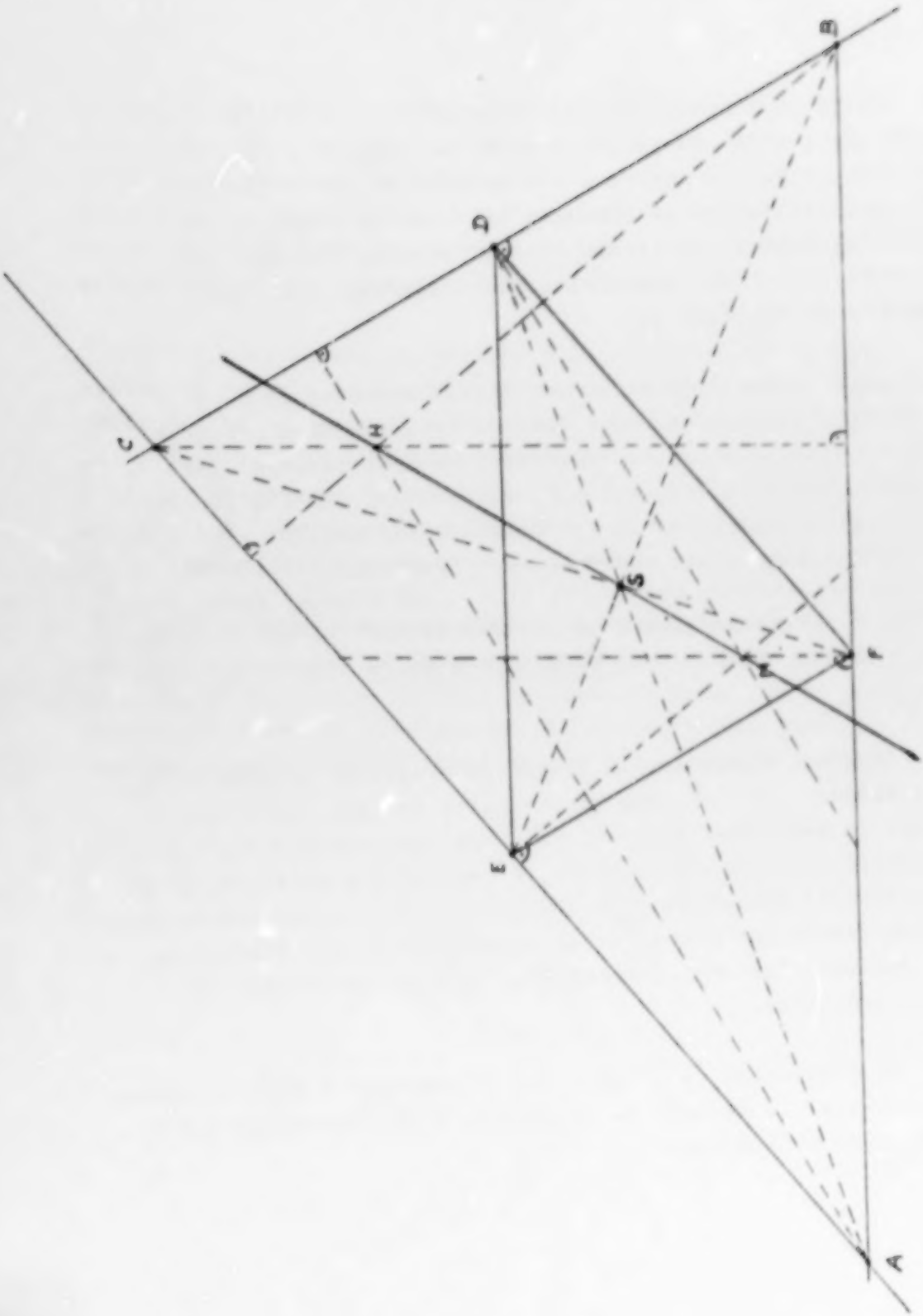


Figure 1

Selon le théorème du centre de gravité, S divise les lignes de gravité AD, BE et CF dans un rapport de 2 : 1. S devient ainsi le centre d'une dilatation au coefficient - 2, qui transforme le triangle DEF dans le triangle ABC. Cette dilatation transforme les hauteurs du triangle DEF, qui sont identiques aux médiatrices dans ABC, dans les hauteurs du triangle ABC.

Ainsi cette dilatation centrale transforme le point d'intersection des hauteurs dans le triangle DEF, c'est-à-dire M, dans le point H d'intersection des hauteurs dans le triangle ABC. Or, si M = S, alors H = S, et l'affirmation -l'assertion - est triviale. Dans l'autre cas, il s'en suit, puisqu'une dilatation centrale transforme sur elles-même les droites passant par le centre, que l'image de M, à savoir H, se trouve aussi sur la droite MS. La droite unique MSH s'appelle dans ce cas <u>la droite d'Euler</u> dans le triangle ABC.

Revenons maintenant à la preuve classique en géométrie euclidienne Ce qui caractérise cette méthode est l'application de théorèmes d'isométrie et de similitude à des triangles partiels appropriés, ou, d'une manière générale, l'application de théorèmes déjà établies à des figures partielles appropriées. Les propositions fondamentales ont d'habitude été prouvées par une démonstration faisant intervenir des transformations.

En didactique on a jusqu'ici eu tendance à opposer comme rivalisante la méthode de la géométrie de transformation et la méthode euclidienne.

En plus d'attirer l'attention sur le présupposé structurel très important (action d'un groupe sur un ensemble structuré) de la méthode des transformations, on a aussi avancé son caractère "opératoire" en l'opposant au caractère "statique" de la méthode euclidienne. Nous allons démontrer maintenant que ce jugement n'est pas fondé.

Pour montrer que la méthode d'Euclide peut se concevoir également dans la perspective du principe opératoire, nous décrivons le "groupement d'Euclide". Ses états sont encore les figures. Mais les opérations sont engendrées ici par les schémas opératoires "élargir une figure" (à l'aide de droites auxiliaires, de figures auxiliaires) - "transition à une figure partielle" et "décomposer - recomposer (de figures)".

Avant d'aller dans les détails de l'application du principe opératoire au "groupement d'Euclide", il convient de considérer un exemple typique de démonstration. Nous avons choisi la preuve du théorème sur le cercle à neuf points de Feuerbach selon COXETER (1963, p.34) (cf. figure 2).

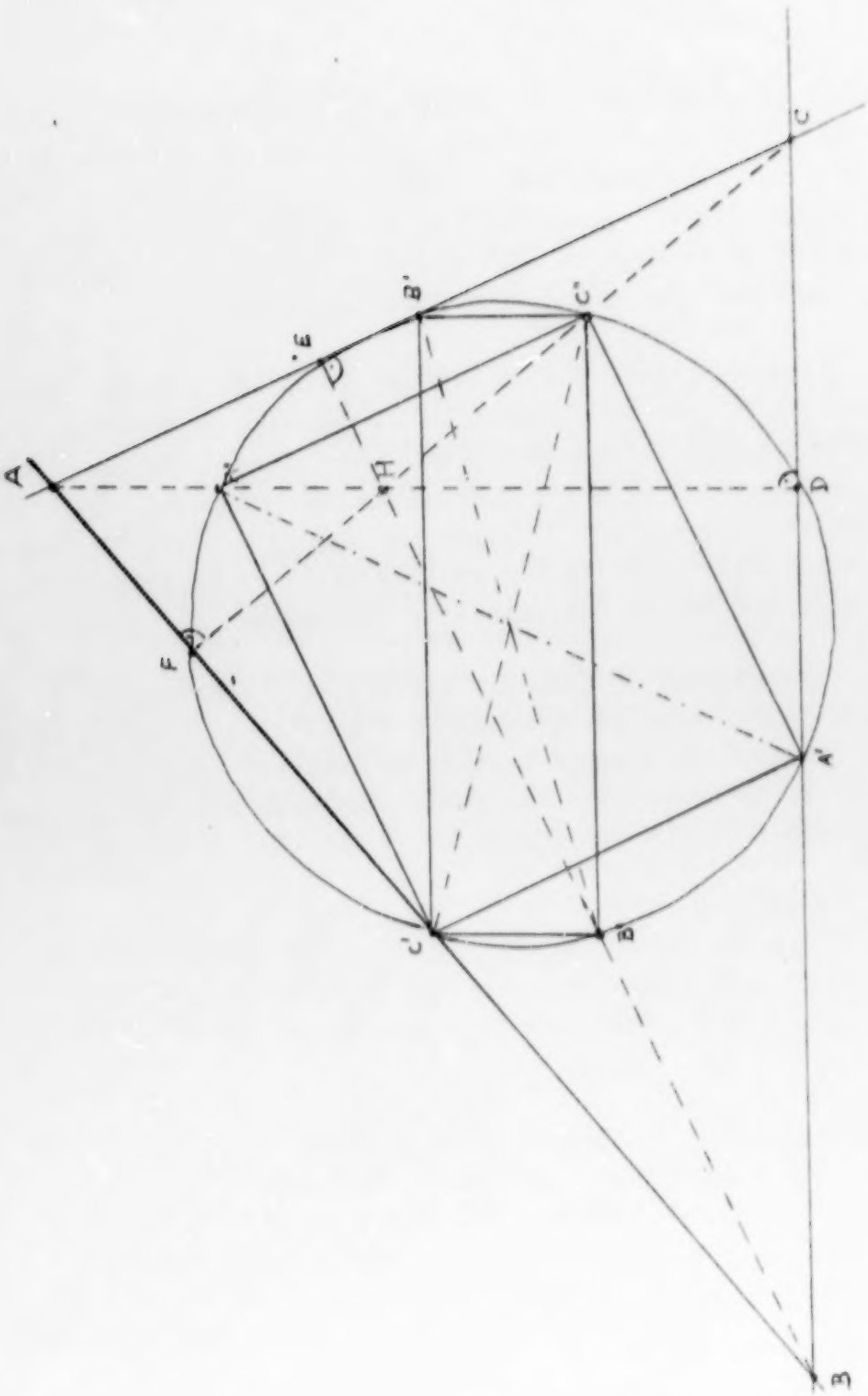


Figure 2

Soient A', B', C', A", B", C" les points-milieu sur BC, CA, AB, HA, HB, HC et soient D, E, F les bases des hauteurs par les sommets A, B et C. D'après le théorème sur la parallèle médiane du triangle, C'B' et B"C" sont parallèles à BC, tandis que B'C" et C'B" sont parallèles à AH. Comme AH est perpendiculaire à BC, on obtient le rectangle B'C'B"C". C'A'C"A" est aussi un rectangle. Il en suit que A'A", B'B", C'C" sont trois diamètres d'un seul cercle. Comme ces diamètres sont les bases de trois triangles rectangles avec l'angle droit aux sommets D, E, F, ces trois points se trouvent aussi sur le cercle.

Le lecteur peut se convaincre à l'aide de la figure de combien d'aspects la figure originale a été enrichie par cette preuve - au cours de cette démonstration, comment on a isolé provisoirement des figures partielles et comment la fonction des parties varie selon leur appartenance provisoire à telle ou telle figure partielle (par exemple: C'C" est une diagonale dans les rectangles C'A'C"A" et C'B" C"B' et elle est en même temps un diamètre du cercle qui circonscrit les deux rectangles).

Pour la préparation cognitive de telles démonstrations on aura intérêt à s'inspirer du principe opératoire dès l'élaboration d'exercices préparatoires systématiques. Ces exercices comprendront:

La composition et la décomposition de figures, l'élargissement de figures, la suppression de parties de la figure, la déconstruction et la reconstruction de figures, ainsi que l'observation continuelle des propriétés, des relations, des fonctions de figures au cours de ces opérations en ce qui concerne leurs compatibilités.

La plus grande importance revient aux compatibilités qui permettent à des figures partielles (points, droites, angles, triangles partiels etc) inscrites structurellement dans la figure de base, d'avoir des relations pertinentes aussi dans les nouvelles figures engendrées par l'opération d'élargir, de décomposer etc.

Exemple: Elargissement d'un triangle par la mise en place du cercle englobant: les côtés du triangle deviennent des sécantes du cercle, les angles du triangle ont dans le cercle le statut d'angles périphériques, les droites reliant le milieu du cercle avec les coins du triangles deviennent des rayons du cercle et des côtés de triangles isocèles.

De telles compatibilités sont nombreuses dans le "groupement euclidien" et ne peuvent guère s'inventorier systématiquement. En raison de leur futilité apparente et de leur contingence, on a tendance à les sous-estimer. De nombreuses recherches, surtout dans le domaine de la psychologie cognitive gestaltiste (qui affirme que le cerveau a tendance à organiser les éléments de la perception en ensembles signifiants, e.g. organiser le ciel étoilé en constellations)[1] ont montré l'effet inhibiteur des "fixations fonctionnelles c'est-à-dire des fonctions" au détriment de la mobilité opératoire recherchée.

La stratégie heuristique associé au "groupement euclidien" sera:

> Trace des lignes auxilliaires appropriées et trouve des figures partielles adéquates!

"Approprié" ou "adéquat" signifie ici" de façon à ce qu'on puisse appliquer des théorèmes connus!"

---

1. Remarque des traducteurs.

Pour résumer on peut dire que la géométrie des transformations aussi bien que la géométrie d'Euclide peuvent être traitées opératoirement. Les méthodes ne se distinguent que par la considération de différentes stratégies heuristiques. Mais comme les deux variantes sont tout à fait compatibles, et comme il n'y a pas de raison de se limiter dans son recours aux moyens heuristiques, il est bien naturel de les combiner dans l'enseignement en classe. Selon la nature du problème qu'on présente on se servira toujours de l'approche la plus directe, quelle qu'elle soit.

A partir de cette conception formée dans le cadre du travail mathématique, l'alternative "géométrie des transformation ou géométrie d'Euclide" comme méthode ne se pose plus du tout. La restriction artificielle à une des deux méthodes s'avère comme absurde aussitôt que l'on considère un contenu géométrique suffisamment grand, au lieu de se tailler sur mesure une "géométrie d'école" - comme cela arrive souvent.

Le fait que la méthode d'Euclide peut se concevoir à partir du principe opératoire, mais que ceci n'a pas été le cas par le passé, nous induit à penser que la méthode de la géométrie des transformations non plus ne constitue pas en soi un procédé opératoire, comme PALZKILL/SCHWIRTZ (1970) semblent l'entendre par endroits. Ici aussi il faut l'intervention de l'interprétant opératoire au sens du principe opératoire élargi.

2.2 Le calcul avec des coefficients binômaux.

Le deuxième exemple étudié ici n'est pas aussi transparent que le précédent, puisqu'il s'agit de comptabilité ("relations générales") au sens très général, qui sont en plus de cela très complexes en partie et ne peuvent être trouvées au bout d'une exploration provoquée, simplement par la question stratégique "Qu'est-ce qui arrive ..., si ..."? Comme on avait déjà mentionné sous 1.4), $\mathbb{Z}$ est pour les schémas opératoires "additionner-soustraire" et "multiplier-diviser" un "groupement double".

Comme on peut composer des paires de nombres entiers $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est aussi un groupement double. Nous étudions la fonction binomiale$(n, k) \rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$ dans l'optique du principe opératoire, c'est-à-dire, nous cherchons les comptabilités de cette fonction avec les opérations sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}$.

D. KNUTH (1973, p. 53-64 sq.) a établi une liste de telles compatibilités:

La condition de symétrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour $n \geq 0$

L'emploi de parenthèses: $\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$ pour $k \neq 0$

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$$

$$\frac{1}{r}\binom{r}{k} = \frac{1}{k}\binom{r-1}{k-1} \quad \text{pour } k, r \neq 0$$

Formule d'addition: $\binom{r}{k} \cdot \binom{k}{l} = \binom{r}{l} \cdot \binom{r-l}{k-l}$

Formules de sommation: $\sum_{0 \le k \le n} \binom{r}{k} \cdot \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}$

$\sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{m+1}$ pour $m, n \ge 0$

Négation de l'indice supérieur: $\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$

Simplification de produits: $\binom{r}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$

Sommation de produits: $\sum_k \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

$\sum_k \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{r+n}$ pour $r \ge 0$

$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} (-1)^k = (-1)^n \binom{s-r}{n}$ pour $r \ge 0$

$\sum_{0 \le k \le r} \binom{r-k}{n} \binom{s}{r-k} (-1)^k = (-1)^r \binom{s-t-n}{r-t-n}$

$$\sum_{0 \leq k \leq r} \binom{r - k}{m} \binom{s + k}{n} = \binom{r + s + 1}{m + n + 1} \quad \text{pour } n \geq s \geq 0, \; m \geq 0, \; r \geq 0$$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r - tk}{k} \binom{s - t(n - k)}{n - k} \frac{r}{r - tk} = \binom{r + s - tn}{n}$$

tel que $r \neq tk$ pour $0 \leq k \leq n$

KNUTH (1973, pp. 58-59) écrit à propos de cette liste: "This completes our study of 'binomial - coefficientology' ... With all these methods at our disposal, we should be able to solve (almost) any problem that comes along ..."

La stratégie heuristique appropriée qu'on appliquera à des exemples, se traduit par:

> "Transforme de façon à pouvoir appliquer des compatibilités connues! "

On donnera une illustration de cette stratégie ici:

Problème: Calcule $\sum_{k \geq 0} \binom{n - k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k + 1}$ pour $n \geq 0$

L'emploi des formules de sommation de produits n'est pas directement possible parce que l'indice de sommation k revient trop souvent, à savoir 6 fois. On essaiera donc d'éliminer k à quelques endroits.

On dérive de la formule pour la simplification de produits d'abord

$$\binom{n+k}{2k}\cdot\binom{2k}{k} = \binom{n+k}{k}\cdot\binom{n}{k}$$

ce qui permet la transformation en

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\cdot\binom{n}{k}\ \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Ensuite on aura évidemment recours à "l'emploi de parenthèses" et on obtient

$$\frac{1}{n+1}\quad\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}\cdot\ (-1)^k$$

L'indice de sommation k revient maintenant quatre fois. On remplacera alors $\binom{n+k}{k}$ par $\binom{n+k}{n}$ et on obtiendra

$$\frac{1}{n+1}\quad\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}\cdot\binom{n+1}{k+1}\ (-1)^k$$

Pour pouvoir employer la troisième formule pour la sommation de produits, nous devons remplacer k + 1 par k:

$$-\frac{1}{n+1}\quad\sum_{k\geq 1}\binom{n-1+k}{n}\cdot\binom{n+1}{k}\ (-1)^k$$

Afin de pouvoir exécuter la sommation à partir de 0, il faut encore procéder à une substitution.

$$-\frac{1}{n+1}\quad\sum_{k\geq 0}\binom{n-1+k}{n}\binom{n+1}{k}(-1)^k+\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}$$

Après application de la formule on aura enfin

$$-\frac{1}{n+1}\ (-1)^{n+1}\binom{n-1}{-1} + \frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}$$

On voit que la somme qu'il fallait calculer pour $n = 0$ a la valeur 1 et qu'elle disparaît pour $n \geq 0$.

Le lecteur est invité à appliquer lui-même la stratégie heuristique en question pour résoudre le problème

$$\sum \binom{r}{k}\binom{s}{k} \cdot k$$

pour $r > 0$.

Pour conclure on fera remarquer qu'on peut donner aussi une interprétation opératoire au calcul des sommes ci-haut:

> Les <u>états</u> du groupement concerné sont "certains" termes formés à l'aide de coefficients binômiaux et les <u>opérations</u> sont les transformations permises de termes en fonction de compatibilités fondamentales et d'autres schèmes (e.g. substituer et compenser). Il ne s'agit donc de rien d'autre que de l'interprétation d'un calcul comme groupement. Le lecteur pourra consulter à ce propos WALTHER, (1974, chapitre 2).

2.3 La solution de problèmes appliqués.

Nous prenons comme exemple le problème suivant concernant le coût d'une voiture, tiré de WINTER/ZIEGLER, Mathématique Nouvelle, vol. 4:

M. W. paie 32 DM comme loyer de garage, 156 DM de taxes automobile par an et 312 DM comme prime d'assurance pour responsabilité civile par an. Il compte avec 25 DM par mois pour réparations et 5 DM d'autres dépenses par mois.

a) Quel est le coût par mois et par année?

b) M. W. fait en moyenne par mois 2000 km. La voiture consomme 11 litres d'essence par 100 km et 1/20 litre d'huile. 1 litre d'essence coute 61 Pf, 1 litre d'huile 6 DM.

c) Quel est le coût total de la voiture, compte tenu de toutes les dépenses, par mois, par année?

d) Combien coûte en moyenne le voyage de la maison au travail (50 km), si on tient compte de toutes les dépenses? A combien revient l'aller et le retour?

e) Si M. W. prenait le chemin de fer pour se rendre au travail et qu'il payait chaque jour son billet aller et retour 7.60 DM (deuxième classe) ou 11.60 DM (première classe)? Compare avec d).

f) Le prix de la voiture à l'achat a été de 7200 DM. M. W. veut garder la voiture trois années et la revendre pour 3600 DM.
A combien monte le coût de la voiture par mois (par an) s'il prend en considération aussi la dévalorisation de la voiture?

Une approche naturelle pour la solution de ce problème emploie des diagrammes 'simplexe'. On peut, par exemple, solutionner la partie f) du problème à l'aide du diagramme de la figure 3. Cette représentation suggère immédiatement un groupement. Les états sont les données de la situation concrète (chiffres, paires de nombres, triplets, ...), et les opérations sont les différents traitements de ces données par la chaîne ininterrompue qui mène des données existantes aux données cherchées. La stratégie heuristique appropriée est bien connue dans le domaine de l'heuristique. Elle consiste en une combinaison du "travail en avant" (c'est-à-dire à partir des données existantes) et du "travail en arrière" (c'est-à-dire à partir des données cherchées). Le prérequis matériel pour le succès de cette stratégie est le "savoir opératoire", c'est-à-dire la connaissance de ce à quoi on aboutit en soumettant telles données à tel traitement.

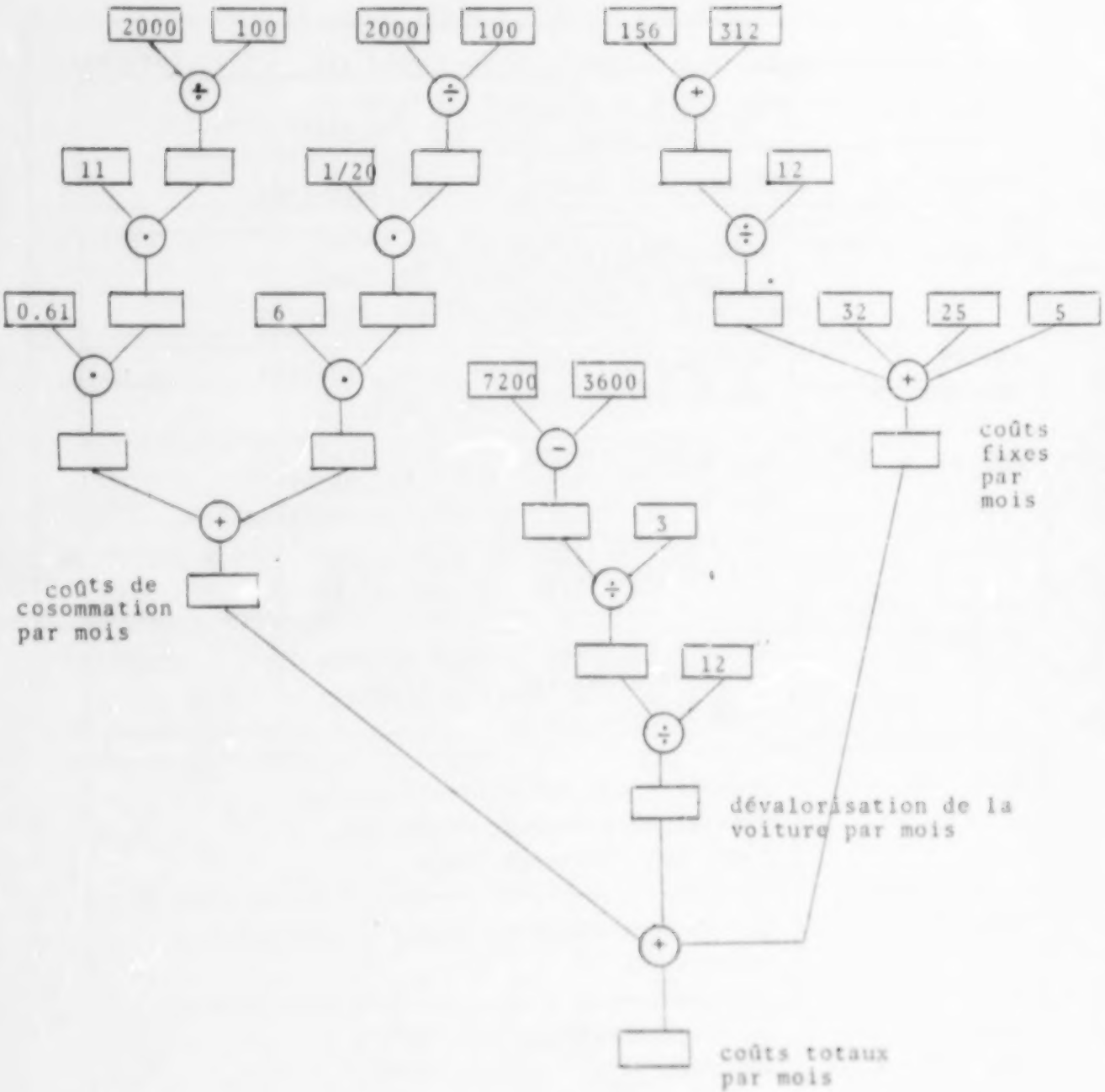

2000
100
÷
11
·
0.61
·
2000
100
÷
1/20
·
6
·
+
coûts de cosommation par mois
156
312
÷
12
÷
32
25
5
+
coûts fixes par mois
7200
3600
−
3
÷
12
÷
dévalorisation de la voiture par mois
+
coûts totaux par mois

Figure 3

B I B L I O G R A P H I E

AEBLI, H.,	Psychologische Didaktik, Stuttgart 1963.
ARNOLD, B.,	Elementare Topologie, GÜttingen 1964.
COXETER, H.S.M.,	Unvergaengliche Geometrie, Basel und Stuttgart 1963.
FRICKE, A./ BESUNDEN, H.,	Mathematik - Elemente einer Didaktik und Methodik, Stuttgart 1970.
HÜrten, K.-H.,	Das heuristische Prinzip der Geometrie und seine Bedeutung fuer die propaedeutik des Mathematikunterrichts, Die Schulwarte 23 (1970), 10-19.
KNUTH, D.,	The Art of Computer Programming, vol. 1/Fundamental Algorithms, Reading/Mass. 1973.
KOCH, Ch.,	Beispiele zum operativen Prinzip, Staatsarbeit Paedag. Hochschule Ruht, Abt. Dortmund, 1974.
OEHL, W.,	Der Rechenunterricht in der Jauptschule, Hannover 1970[4].
PALZKILL, L./ SCHWIRTZ, W.,	Die Raumlehrestunde, Ratingen 1971.
SCHWIRTZ, W.,	Die Bedeutung des operativen Prinzips fuer den Geometrieunterricht der Hauptschule, Lehren und Lernen, 9/1969.

SZEMINSKA, A.,	The Evolution of Thought: Some Applications of Research Findings to Educational Practice, Monogr. Soc. Res. Child Developm. 30 (1965), Nr. 2., 47-57.
WALTHER, G.,	Operative Ansaetze zu einer inhaltlichen Logik im Mathematikunterricht, Diss. Paedag. Hochschule Ruhr 1974.
WITTMANN, E.,	Zum Begriff "Gruppierung" in der Piagetschen Psychologie, Beitraege zum Mathematikunterricht 1972, Hannover 1973, Teil 2, S. 203-222.
WITTMANN, E.,	Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974.
WITTMANN, E.,	Natural Numbers and Groupings, Educational Studies in Mathematics 6 (1975).

La didactique de la mathématique en tant que "science d'ingénieur"

par

Erich Wittmann

Paedagogische Hochschule, Dortmund

Traduction: D. Lunkenbein et L. Morcos

Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences
Département de mathématique, Section enseignement

La didactique de la mathématique en tant que "science d'ingénieur" c'est-à-dire un savoir-faire créateur.

Remarque préliminaire.

La "didactique de la mathématique" apparaît actuellement à l'observateur superficiel comme rien de plus qu'un concept peu défini qui sert d'étiquette à toutes sortes de contributions dans le domaine de l'enseignement de la mathématique. Les jugements concernant leur validité peuvent varier (et ils le font en effet). Mais dès qu'on considère les travaux assez substantiels, on reconnaît à travers les différentes optiques adoptées une certaine cohérence qui mérite d'être mise en relief. On ferait fausse route en essayant de trouver une réponse contraignante à la question de ce qu'est la didactique de la mathématique, et de vouloir trouver la preuve de la nécessité d'une telle discipline, puisque le statut de la didactique ne peut être vérifié logiquement. Il ne nous reste qu'à proposer comment une didactique de la mathématique devrait être entreprise (approchée) et organisée, et d'apporter à l'appui de cette opinion assez de raisons convaincantes pour pouvoir espérer de trouver des adeptes. Voilà la voie qu'on suivra ici.

La conception d'une didactique spécialisée (selon la matière d'enseignement) qu'on avance ici a été développée depuis 1970 au sein du département Mathématiques/Sciences de la Paedagogische Hochschule Ruhr, Section Dortmund, par une équipe de représentants de différentes disciplines. D. Nachtigall[1] (Didactique de la physique) et H. Winter (maintenant à Neuss) y ont apporté des contributions majeures.

---

1. Voir Nacht'gall (6).

1. Objectifs de l'enseignement de la mathématique.

En première approximation on peut esquisser la tâche de l'enseignant de la mathématique dans les écoles de formation générale comme devant

a) transmettre certaines techniques mathématiques culturellement conditionnées et assurer une formation plus spécifique en vue des activités professionnelles ultérieures,

b) (de) communiquer une conception du rôle que joue la mathématiqu- dans une société,

c) et (d)'aider l'élève à développer sa personnalité.

L'enseignement de la mathématique est un domaine aux dimensions différentes et aux aspects multiples en raison de ses objectifs qui changent avec l'évolution de la mathématique et avec l'évolution des idées sur la société, la mathématique et sur l'homme en tant qu'individu et en tant que membre d'une société, ce qui oblige le didacticien à toujours repenser, renouveler et reformuler sa discipline, en fonction de ces aspects:

a) l'aspect pragmatique: les processus d'acquisition cognitive concernent des contenus, dont la structure spécifique est celle de la mathématique.

b) l'aspect pédagogique (y compris l'aspect social): les processus d'apprentissage s'orientent en fonction des buts à atteindre par l'acquisition d'un savoir.

c) l'aspect psychologique (y compris l'aspect sociologique): les procédés d'apprentissage doivent tenir compte de la disposition des élèves.

d) aspect scolaire (constructif): la planification et le travail en classe exigent des décisions où la maturité et le savoir-faire jouent le rôle le plus important. Ce savoir-faire comprend des éléments de la mathématique, de la pédagogie et de la psychologie.

Quiconque porte une responsabilité dans ce domaine est confronté toujours avec la question:

> En développant une conception générale et une pratique de l'enseignement de la mathématique, comment peut-on tenir compte des impératifs sociaux, de la disposition et des droits de l'élève d'une façon toujours renouvelée et toujours améliorée, dans la mesure du possible?

On ne pourra guère nier que cette question, appelée dans ce qui suit la problématique de l'enseignement de la mathématique, mérite d'être traitée sérieusement et systématiquement en vue de sa portée éminente pour l'enfant, le parent, l'enseignant et la société en général.

2. Une approche de la didactique de la mathématique.

Pour commencer un travail de recherche sur la problématique de l'enseignement de la mathématique, il faudra d'abord établir les liens avec un certain nombre de sciences-ressources: la mathématique (en premier lieu), la psychologie, la pédagogie, les sciences sociales et peut-être quelques autres encore. Il n'est évidemment pas nécessaire, que cette référence à une science-ressource apparaisse nécessairement dans chaque travail en didactique (ce qui serait absurde), mais il faut, par contre, que ce lien avec les sciences-ressources se réflète dans l'ensemble des travaux de recherches qu'on trouve dans les manuels, les revues, dans les congrès, dans les programmes de formation, dans le travail de comités etc.

Par le passé, on a vu des ébauches très particlles dans ce sens. L'enseignement de la mathématique au niveau secondaire était sous la domination exclusive de la mathématique: le statut particulier des étudiants en Formation des Maîtres n'a simplement pas été compris; leur formation était celle des diplômés en mathématique (et dans la majorité des cas, ils se considéraient comme des "mathématiciens"); les autres sciences-ressources furent considérées comme inutiles, superflues (contingentes) ou même nuisibles; leur étude fut remise au deuxième cycle de la formation des enseignants.

Dans la formation des maîtres (pour les premiers cycles) c'étaient au contraire les "sciences fondamentales" qui dominaient; l'étude de la matière d'enseignement était considérée comme contingente.

Aujourd'hui encore, on peut parfois entendre l'opinion (même à un congrès des ministres de l'éducation) que le futur maître à l'école primaire est capable d'enseigner la mathématique en raison de ses connaissances attestées par le baccalauréat deuxième partie.

Ces tendances traditionnelles contradictoires n'ont pas cessé de se faire sentir à travers les efforts réformateurs actuels. Il est significatif que la confrontation des deux tendances, qu'on pouvait observer, n'a point été déclenchée par une réflexion sur la problématique de l'enseignement des mathématiques, mais uniquement par des préoccupations touchant le statut de l'enseignant (nivellation). En ce moment un compromis purement formel semble se préparer: le rapport entre la formation dans la matière d'enseignement et les sciences fondamentales (sciences-ressources) sera probablement changé en faveur de l'une ou de l'autre en fonction du niveau de l'enseignement. De beaux chiffres dans le tableau de distribution semblent attester la validité de la solution choisie.

Malgré l'importance indéniable des sciences-ressources pour l'enseignement de la mathématique, il faut bien se rendre compte qu'un éparpillement du curriculum de l'étudiant en Formation des Maîtres dans des disciplines isolées ne nous approche pas d'une solution optimale du problème de l'enseignement de la mathématique. Car cette problématique est de nature spécifique puisqu'elle n'est touchée par aucun problème de recherche dans chacune des sciences-ressources, et qu'elle ne saurait être exprimée dans le langage d'une de ces sciences.

Autrement dit, la problématique de la didactique mathématique ne peut être formulée comme un problème ni de la mathématique, ni de la psychologie ou de la sociologie, comme elle ne peut se concevoir à l'aide des thèses, normes et objectifs de la pédagogie.

La spécificité de la problématique de l'enseignement de la mathématique justifie donc (et exige même) une approche spécifique compte tenu de l'indépendance relative d'une didactique de la mathématique, et c'est bien la raison pour laquelle une telle discipline est en voie de s'établir sur une échelle internationale.

Le caractère propre de la didactique de la mathématique, son autonomie vis-à-vis des sciences-ressources, devait se manifester tout particulièrement sur deux points, qui suggèrent un rapprochement avec les sciences modernes du génie (et surtout avec le secteur du "operations research"):

1) La didactique de la mathématique devrait fouiller systématiquement la pratique de l'enseignement de la mathématique du point de vue de l'enseignant dans le but de développer une planification optimale et des moyens didactiques efficaces.
Ceci signifie une orientation prescriptive et constructive pour la didactique de la mathématique contrairement aux sciences-ressources qui sont à l'égard de l'enseignement de la mathématique neutres, descriptives ou normatives.

2) La didactique de la mathématique devrait éclore sur un niveau interdisciplinaire puisqu'il s'agit d'envisager et de traiter des objets et des méthodes mathématiques en relation avec des questions mathématiques d'ordre général (philosophiques, épistémologiques et méthodologiques), en relation avec les objectifs scolaires généraux, en relation avec la disposition des élèves, en relation avec la transposition (d'une théorie didactique) dans la pratique de l'enseignement, etc. Un tel projet exige donc une démarche complexe (WINTER, 8) qui envisage les différentes dimensions de la didactique mathématique dans leurs interdépendances.

L'approche interdisciplinaire de la didactique mathématique devrait prévoir aussi une coordination avec d'autres disciplines enseignées à l'école et leurs procédés didactiques respectifs, ce qui pourrait contribuer à sauvegarder une certaine convergence des différentes disciplines.

Il devrait aller de soi qu'il est impossible au didacticien isolé de garder en vue toutes les parties de la didactique mathématique, pour ne pas parler de toutes les sciences-ressources. La collaboration avec des collègues, mathématiciens et autres scientistes concernés est naturelle et nécessaire. Le travail en équipe est un impératif pour des projets de quelques envergures.

Or, l'expérience a montré lors de la réalisation de projets interdisciplinaires, que la collaboration de spécialistes invétérés de différents domaines est difficile à obtenir. Les prérequis suivants devraient guider la sélection des coéquipiers pour un projet de didactique de la mathématique: très bonnes connaissances spécialisées, et une introduction approfondie dans au moins une des sciences-ressources connexes (préférablement en mathématiques, à certaines restrictions près), une bonne connaissance intuitive d'autres sciences-ressources une compétence pédagogique reconnue, le plaisir de voir progresser intellectuellement l'élève, l'engagement social et une ouverture d'esprit ("open-mindedness").

L'ébauche esquissée ici[1] ne saurait prétendre à servir comme cadre de référence général pour la didactique de la mathématique. Mais voilà que la discussion internationale semble s'orienter dans cette direction. (cf. Howson, 5).

3. La situation présente de la didactique de la mathématique.

Du point de vue de la production aussi bien que du point de vue de l'organisation la didactique de la mathématique est en pleine gestation et n'a pas encore trouvé des formes établies. Un certain recul de distanciation semble un peu partout suivre l'enthousiasme naif des premières années, ce qui sera tout à l'avantage de la didactique.

---

1. Voir WITTMANN (10).

En Allemagne (comme dans d'autres pays) il est difficile d'arriver à un consensus concernant le statut de la didactique de la mathématique, son organisation pratique dans les établissements d'enseignement supérieur (inclusion dans les départements de mathématiques ou des sciences de l'éducation) ou création d'instituts indépendants à caractère interdisciplinaire) en raison du fait que les didacticiens viennent de départements différents dont ils gardent des intérêts et des obligations différents (ce qui n'a pas dans tous les cas un effet heureux). L'organisation rapide de la didactique de la mathématique dans les établissements d'enseignement supérieur s'est fait partiellement au détriment de la qualité et elle n'a pas toujours attiré des adeptes compétents et enthousiastes.

Les publications dans le domaine de l'enseignement de la mathématique varient en genre et en qualité. Les niveaux divers d'exigence des maisons d'édition et le manque d' une sélection critique ont permis que des contributions non-pertinentes, triviales et marquées de dilettantisme ont vu le jour.

Ces remarques critiques faites il ne faudrait pas oublier que l'image d'une discipline qui n'en est qu'à ses débuts est nécessairement hétérogène, et il faut attendre que les idées valables se soient imposées avant de pouvoir appliquer un étalon. Il faut concéder aux didacticiens l'occasion d'apprendre - de tirer des leçons de leurs erreurs tout comme cela a été le fait pour leurs aînés dans d'autres disciplines fermement établies entretemps. On peut d'ailleurs déjà avancer une série de paradigmes qui indiquent la voie pour un travail productif.

Voici quelques exemples à cet effet:

-pour l'analyse didactique de contenus mathématiques dans l'optique de la mathématique générale (Freudenthal, 4)

-à propos de la relation entre les objectifs d'apprentissage spécifiques de la mathématique et les buts de l'apprentissage en général de la pédagogie (Winter, 8)

-l'application et la vérification de postulats de la psychologie dans la classe de mathématique (Fischbein et al., 2)

-la structuration de l'enseignement: les projets Nuffield et SMP en Angleterre (en proportions réduites: Fletcher, 3)

-l'évaluation de la planification de l'enseignement - de cours -: Weis/Bauersfeld, 11

-l'enchevêtrement entre la théorie et la pratique: L'élaboration du curriculum en Angleterre, et surtout celui de Mathematics for the Majority Continuation Project.

Le meilleur tableau d'ensemble de l'état de la discipline au niveau international donne les "Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education" (Howson, 5).

4. La relation entre la didactique de la mathématique et la réalité scolaire (le problème d'innovation).

La tâche spécifique de la didactique de la mathématique se fait sentir tout particulièrement dans la confrontation avec un des problèmes les plus difficiles posés par l'amélioration de l'enseignement de la mathématique, celui de l'innovation. La didactique perdrait largement sa raison d'être si elle se contentait d'être une discipline académique (universitaire), c'est-à-dire si elle était limitée dans son exercice à créer la base scientifique des programmes d'enseignement, leur élaboration et leur vérification. Elle ne deviendra vraiment utile qu'au moment où elle participera à la tâche de mettre sur pied un enseignement amélioré et qu'elle saura imposer les conditions indispensables pour réaliser ses projets contre les résistances et les difficultés multiples qui l'accueillent dans la réalité scolaire. C'est contre quoi le didacticien individuel doit s'armer d'un engagement convaincant au niveau régional.

La situation où se trouve aujourd'hui la discipline de la didactique ressemble beaucoup à celle d'autres sciences appliquées. Voilà pourquoi les leçons qu'apprendra le didacticien professionnel peuvent très bien se lire, mutatis mutandis, dans l'analyse qu'a présentée Szanton (7) en examinant avec beaucoup de perspicacité intuitive le problème de l'innovation dans le domaine du Operations Research.

Szanton montre à l'exemple de deux problèmes qui se sont posés dans l'administration d'une ville américaine (horaire de travail pour la police et politique d'urbanisme) quelles difficultés rencontrent les tentatives d'innovation, et il en tirent un certain nombre de conséquences:

"In short, then, quantitatively-oriented analysts first encountering urban problems encounter a number of difficulties. They find major issues - of cause, purpose, effect, - analytically formidable, and minor ones - of efficiency - tractable and attractive. They believe that analysts advise, and officials decide and enforce; they learn only slowly that both decision-making and implementation are processes, not acts, and that both require their own protracted participation. And they are appalled, even so, at the ability of bureaucracies, and of the larger society, to resist changes that seem to them so self-evidently rational".

"But what I have been arguing, I think, is that if urban services are to be made more effective and urban policies more rational to a more than trivial degree, then two conditions must be met: (1) analysts and researchers must provide advice that springs from a much richer body of theory and of experience; and (2) analysts and researchers must be placed in a novel kind of relation with officials. The analysts must be independent enough to be critical of city policies, insulated enough from daily operational concerns to work persistently on unterlying problems, but close enough in their working relations with city agencies to produce recommendations that are timely, realistic, and usable. This combination of conditions is not well met within traditional organizational forms".

5. Les rapports entre la didactique de la mathématique et les sciences-ressources.

"If there are some subjects on which the results obtained have finally received the unanimous assent of all who have attended to the proof, and others which... have never succeeded in establishing any considerable body of truth, so as to be beyond denial or doubt; it is by generalizing the methods successfully followed in the former enquiries, and adapting them to the latter, that we may hope to remove this blot on the face of science."

J.S. Mill (Philosoph und Nationalökonom)

"Some of the major didasters of mankind have been produced by the narrowness of men with a good methodology... To set limits to speculation is treason to the future."

A.N. Whithead (Mathematiker)

L'attitude du didacticien de la mathématique à l'égard des sciences-ressources se laisse brièvement caractériser comme suit: Dans la règle, les didacticiens lèvent le regard vers la mathématique et regardent d'en haut sur les autres sciences-ressources (et tout particulièrement sur la pédagogie).

Ceci mène à une distanciation vis-à-vis des scientistes des disciplines-ressources d'un côté et à un désir prononcé de trouver la reconnaissance et l'appui des mathématiciens de l'autre côté. Un désir qui peut aller jusqu'à l'identification.

Ainsi, il est arrivé par exemple lors du congrès de Baureuth en 1971, qu'on a encouragé sérieusement les didacticiens à rejoindre avec leur travails leurs collègues sur le terrain de la mathématique pour rehausser leur propre statut. Au congrès de Berlin de la même année, un conférencier allait jusqu'à offrir le conseil de cesser de faire de la "didactique" comme elle a été conçue jusqu'ici, et de commencer à aménager une petite pépinière de la mathématique - et le même conférencier ne se gène pas d'éditer un manuel de la didactique!

Pour une évaluation réaliste des rapports entre la didactique et la mathématique les faits suivants me semblent être déterminants:

1) La science de la mathématique (conçue dans sa totalité y compris ses aspects phénoménologiques et philosophiques, ses applications dans des domaines différents, dans l'heuristique etc) joue sans doute un rôle primordial pour la didactique de la mathématique en comparaison avec celui des autres sciences-ressources. Aussi la méthodologie de la mathématique fournit un modèle de procédure scientifique qu'il faudrait essayer de suivre même si l'on ne peut pas l'atteindre.

2) Malgré tout l'estime qu'on peut ressentir à l'endroit de la mathématique il faut retenir que la problématique de l'enseignement de la mathématique n'est pas une problématique partielle de la mathématique.

> Si l'on conseille donc aux didacticiens de s'enfermer dans le domaine de la mathématique cela revient (pour reprendre une métaphore de Szanton, 7, p. 471) à donner conseil à quelqu'un qui a perdu de l'argent dans un endroit sombre de la rue, d'aller chercher sous le premier reverbère, puisqu'il y aurait de la lumière.

L'attitude des mathématiciens à l'égard des didacticiens n'est point aussi positive que l'inverse. Tout au contraire: elle est franchement désagréable et cela au détriment d'une collaboration fructueuse dans la formation des enseignants.

Les mathématiciens se forment dans la majorité un jugement négatif du travail des didacticiens et de la compétence des didacticiens pour l'enseignement de la mathématique. Quelques préjugés fort répandus, et largement subconscients, y portent; on pourrait les formuler, en simplifiant un peut, comme suit: qui n'a pas produit grand'chose en recherche mathématique n'aurait pas le droit de dire un mot sur l'enseignement de la mathématique. Par contre, les chercheurs compétents de la mathématique sauraient le mieux ce qui convient à l'enseignement de la mathématique. C'est pourquoi il reviendrait à eux de décider aussi bien de la sélection de la matière à enseigner que des programmes de cours et du choix des manuels", (Felscher, 1, p. 133).

Or, on peut en effet apporter quelques critiques à l'endroit des didacticiens et de leurs travaux (et aussi en ce qui concerne leur rôle dans la réforme actuelle de l'enseignement de la mathématique (cf. chapitre 3)); mais de telles prises de position (v. paragraphe précédant) me semblent extrêmement superficielles et entâchées d'une assurance exagérée, voire, de naïvité.

Pour parvenir à une évaluation différenciée et appropriée il faudrait d'abord établir clairement qui étaient ceux qui ont apporté au cours des dernières années les idées didactiques décisives pour l'enseignement de la mathématique et qui ont développé tous les détails de l'application, quel était le rôle des mathématiciens dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques (par exemple, comme elles ont été enseignés traditionnelement, mais aussi en ce qui concerne les Mathématiques Nouvelles); il faudrait voir quelles sont les différences d'opinion éventuellement importantes à propos d'une mathématique "vivante" parmi les différents groupes de mathématiciens (par exemple, les mathématiciens purs "détournés", versus les informaticiens ou les spécialistes du Operations Research); il faudrait se demander en fin de compte si le point de vue "per se" du spécialiste de la mathématique ouvre une perspective sur la société et aussi dans la problématique de l'enseignement de la mathématique. Un tel examen contribuera probablement à une meilleure compréhension du travail des didacticiens et au développement d'une attitude plus positive envers eux.

Pour ce qui est de l'attitude des autres scientistes concernés à l'égard de la didactique, les consitions pour une bonne collaboration me semblent remplies, au moins dès que certaines questions de compétences ont été éclairées et que les didacticiens eux-mêmes adoptent une attitude positive à leur égard.

Il faudrait donc bien la peine de multiplier et de renforcer les contacts.

On aurait beaucoup à gagner pour l'avenir si tous les concernés (didacticiens inclus) poussaient vraiment à fond leur travail sur la problématique de l'enseignement de la mathématique. Ce serait là le meilleur moyen de créer une plateforme pour la coopération/collaboration fructueuse des didacticiens, enseignants, mathématiciens, scientistes-ressources et les administrations scolaires, ce qui est indispensable pour le développement solide, équilibré et nourri à toutes les sciences connexes.

B I B L I O G R A P H I E

1) FELSCHER, W.,	Ist Mengenlehre auf der Schule Unfug? ATTEMPTO (Tuebinger Universitaets-zeitschrift) Nr. 49/50 (1974), 124-133.
2) FISCHBEIN, E. et al.,	Initiation aux probabilités, Educ. Studies in Math. 1 (1969).
3) FLETCHER, T.J.,	Exemplarische Uebungen zur modernen Mathematik, Freiburg 1971.
4) FREUDENTHAL, H.,	Mathematik als paedagogische Aufgabe, Stuttgart 1973/74 (2Bde).
5) HOWSON, A.G.(Ed),	Developments in Mathematical Education, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge University Press 1973.
6) NACHTIGALL, D.,	Fachdidaktik in Forschung und Lehre, erscheint in: Physikalische Blaetter.
7) Szanton, P.L.,	Systems Problems in the City, Operations Research vol. 30 No. 3, (1972), pp 465-473.
8) WINTER, H.,	Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula fuer den Mathematikunterricht in der Gesamtschule in: Beitraege zum Lernzielproblem, Ratingen 1972.

9) WITTMANN, E.,	Zur gegenwaertigen Situation der Fachdidaktiken, Neue Sammlung 13 (1973), S. 120-129.
10) WITTMANN, E.,	Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974.
11) WEIS, V./ BAUERSFELD, H.,	Neue Mathematik und Rechenfertigkeit, Westermanns Paedagogische Beitraege 25 (1973), S. 127-.35.

Le concept de groupement de J. Piaget dans le processus de la rationalisation des interventions didactiques.

par

Dieter Lunkenbein

Université de Sherbrooke

Conférence donnée le 14 janvier 1976
à la Paedagogische Hochschule
Dortmund, R F A.

Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences
Département de mathématiques, Section enseignement.

Hiver 1976

Le concept de groupement de J. Piaget dans le processus de la rationalisation des interventions didactiques.

I. Quelques remarques concernant le processus de la rationalisation des interventions didactiques.

1.1 A propos du dilemme de la recherche en didactique de la mathématique.

Un des traits caractérisant la didactique de la mathématique est son aspect multidisciplinaire. Elle doit intégrer des disciplines aussi différentes que les mathématiques, la pédagogie et la psychologie. Il est très rare de trouver des travaux de didactique qui équilibrent l'incidence de ces trois composantes.

Il arrive même souvent que des méthodes qui ont fait leur preuve dans d'autres disciplines sont adoptées telles quelles sans adaptation appropriée. C'est ainsi que nous rencontrons, dans la didactique de la mathématique, des méthodes employées dans la recherche en mathématique, dans la recherche en sciences de l'éducation et dans la recherche en sciences, des méthodes de la psychologie clinique, etc. La non-pertinence de ces procédés de recherche pour la didactique de la mathématique, il faut l'admettre, passe souvent inaperçue.

La didactique de la mathématique étant une science naissante, elle apporte des problèmes de recherche nouveaux et exige des méthodes à elle; elle ne peut donc être incorporée ni à la pédagogie ni à la mathématique. Elle est, parmi d'autres domaines de recherches interdisciplinaires, un objet d'investigation scientifique qui échappe, dans son développement; aux catégories de la classification traditionnelle et fait éclater les normes et manières de penser habituelles.

C'est le même, quoique dans une optique un peu différente que l'on observe en didactique où deux tendances parfaitement opposées se dessinent: d'une part, on fait rapport d'expériences minutieusement élaborées dont les résultats sont analysés à l'aide de procédés d'analyse statistique complexes, et d'autre part, on élabore des procédés intuitifs dont les résultats ne sont guère vérifiables. Les résultats de l'un et de l'autre de ces procédés poussés à l'extrême sont réduits à l'insignifiance, puisque les uns sont trop particuliers et les autres trop vagues.

1.2 La réalité de l'école.

Aussi longtemps qu'il en sera ainsi, l'enseignant à l'école ne pourra tirer profit des résultats qu'offre la recherche didactique car ceux-là sont, ou bien trop particuliers, ou bien trop vagues. Or, c'est justement l'enseignant qui attend - et il a toutes les raisons de le faire - de la recherche didactique, des propositions raisonnables et concrètes pour l'amélioration de son enseignement de la mathématique. Trop souvent hélas, l'enseignement est fondé sur la seule intuition ou, sur des programmes d'enseignement relativement peu structurés dont la planification est peu raisonnée, ou sur des hypothèses difficilement justifiables.

1.3 Recherche appliquée en enseignement.

Quand on entreprend de résoudre la question de l'interdisciplinarité et de pallier aux difficultés qui résultent du conflit des méthodes, tout en cherchant à exercer une influence aussi directe que possible sur la pratique de l'enseignement de la mathématique, on aboutit nécessairement à la

conclusion qu'il faut délimiter un domaine qu'on pourrait désigner comme celui de la recherche pragmatique en didactique ou, en d'autres termes, la recherche appliquée en enseignement.

Celle-ci comprend:

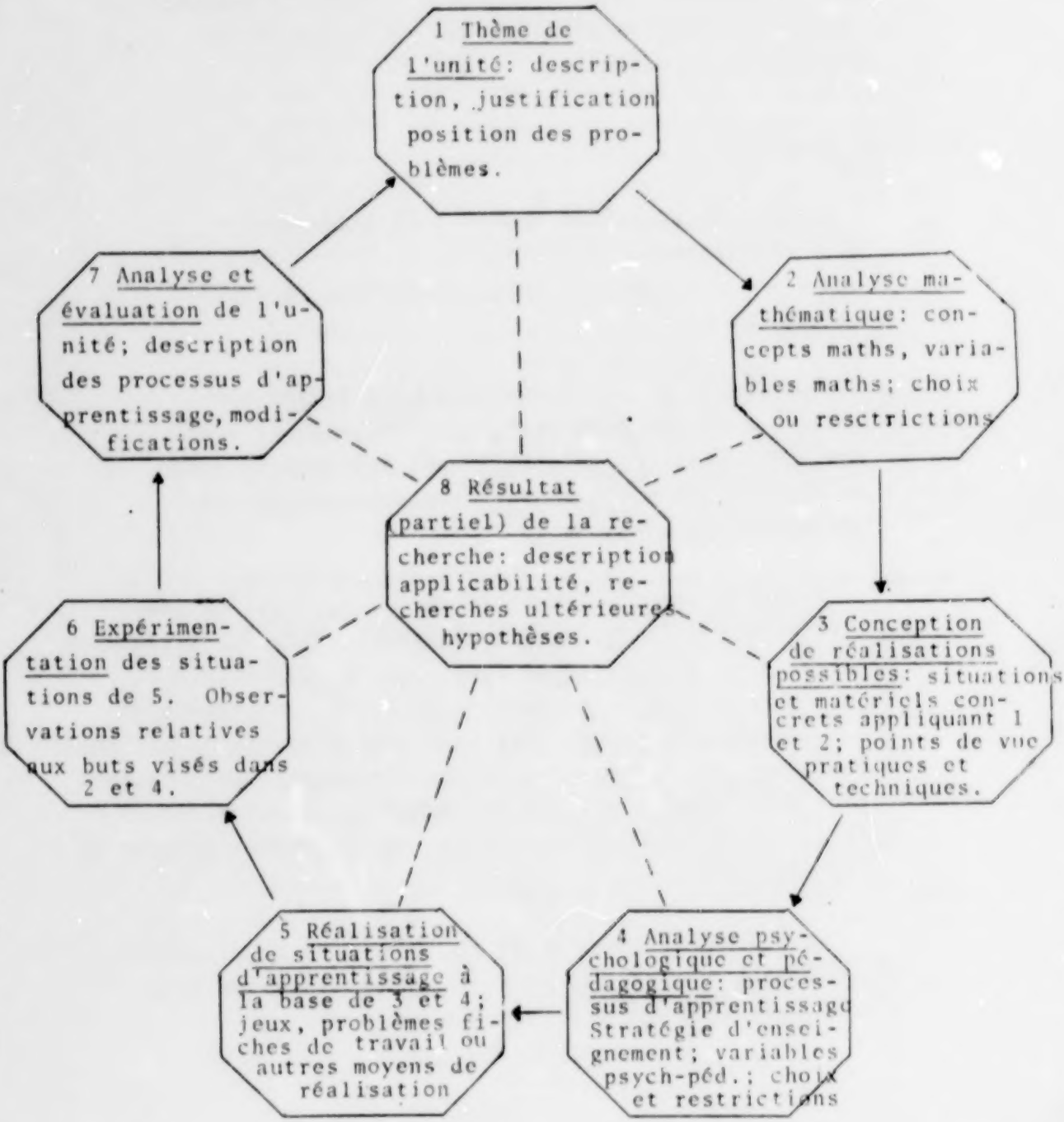
- l'analyse de problèmes concrets et classiques de l'enseignement et l'élaboration de propositions de solutions qui soient concrètes et applicables, ou bien

- la conception de situations d'apprentissage concrètes, dont les fondements épistémologiques sont analysés, dont les objectifs sont précisés et dont la réalisation a été mise à l'épreuve par une expérimentation adéquate.

Essentiellement, une telle recherche aboutira donc à l'élaboration d'unités d'enseignement concrètes desquelles on dira, avec un maximum de précision et de pertinence, ce qui pourra être fait, comment le faire, et peut-être aussi pourquoi le faire. Ces unités d'enseignement ne constitueraient pas seulement un contenu objectif que le praticien appliquerait mais elles communiqueraient aussi un certain esprit caractéristique de l'enseignement moderne de la mathématique.

Pour l'exécution de tels projets, nous nous servons actuellement d'un modèle de procédure que nous pouvons schématiser sous forme d'organigramme comme suit:

Modèle pour l'élaboration didactique d'une unité d'enseignement.



Remarques au sujet du modèle:

a) Ce cycle, ainsi que ses différentes étapes, ne doit pas etre vu isolément. Il est lié dans des réflexions plus générales d'ordre pédagogique, psychologique, mathématique et pragmatique. Les différentes étapes de ce cycle constituent des noeuds et elles ont été mises en évidence dans le but d'une systématisation.

b) En tant que diagramme, le modèle représente la fermeture transitive de la relation indiquée par les flèches. Il ne faut donc pas nécessairement compléter tout le cycle avant de pouvoir procéder à des modifications de l'une ou l'autre des étap es. Aussi la suite consécutive des étapes n'est-elle pas absolue?

Ce modèle décrit un processus, que nous avons appelé la rationalisation des interventions didactiques. Le processus n'est toutefois pas complété d'une façon générale quand le cycle a été parcouru une fois. Il peut, le cas échéant, être parcouru un nombre de fois non-déterminé de façon à aboutir à une compréhension de plus en plus approfondie de l'unité d'enseignement en question. Par contre, un parcours du cycle représente une phase dans l'élaboration de l'unité d'enseignement. Il produit une description plus ou moins détaillée (avantages et désavantages - points forts et faibles) de l'unité en question, et permet de cerner les points sur lesquels il faudra concentrer l'attention lors de parcours ultérieurs du cycle.

De l'élaboration d'une unité d'enseignement, nous ne croyons cependant pas pouvoir tirer des inférences généralisantes à partir des résultats obtenus, si élaborés soient-ils. Ces derniers pourront nous fournir des "preuves d'existence" (A.Z. KRYGOWSKA) de certains processus partiels et des indications précieuses quant à l'orientation de recherches ultérieures. Nous pourrons par contre espérer que des séries de tels processus, observés dans des domaines les plus différents, permettront de dégager, dans une perspective plus globale, certains caractères généralement valables comme celui des étapes dans l'apprentissage de la mathématique ou des stratégies d'enseignement particulièrement efficaces.

II Le concept de groupement et son rôle dans la rationalisation des interventions didactiques.

II.1 La nature des critères théoriques.

Les critères théoriques dont nous nous servons dans le cadre de ce processus aux fins mêmes de l'analyse sont, d'un côté, de nature mathématique et, de l'autre, de nature psychopédagogique. La formulation souvent trop imprécise et trop générale des critères psycho-pédagogiques rend difficile leur application dans des situations concrètes d'apprentissages; ou leur enlève même toute pertinence. Ce qu'on appelle le principe opératoire fournit un bon exemple à cet effet. Comme le concept de groupement de Piaget est resté longtemps inapplicable en raison de sa formulation imprécise et non-exempte de contradictions internes, il ne pouvait être introduit que de manière tout à fait intuitive ou même superficielle dans des travaux relatifs aux situations d'apprentissage concrètes.

II.2 Interprétation et formalisation du concept du groupement.

Les travaux de WITTMANN[1] pour l'interprétation et la formalisation du concept de groupement de Piaget ont accompli ici une tâche primordiale. Déjà la première formulation, qui dérive la structure du groupement de celle du treillis, a développé le principe opératoire en un outil extrêmement précis pour l'analyse et la conception de situations d'apprentissage. La conception du groupement en tant que catégorie particulière a ouvert à ce concept un champ d'application dont on ne voit pas encore les limites.

II.3 Le rôle du groupement pour la rationalisation des interventions didactiques.

Dans le cadre du processus de rationalisation de même que pour le choix et la détermination de variables pertinentes dans ce contexte, nous employons ce concept essentiellement en rapport avec l'analyse psychologique-pédagogique. De plus, ce concept joue un rôle également important dans l'élaboration de situations d'apprentissage et dans l'analyse des résultats de l'enseignement expérimental.

En général, nous allons considérer sa pertinence pour l'analyse et la conception de situations d'apprentissage relativement aux questions ou aux points suivants lesquels présentent un intérêt particulier dans le cadre de notre projet de recherche:

---

1. E. WITTMANN, The concept of grouping in Jean Piaget's psychology - formalization and applications, Ed. Studies in Mathematics, 5, 1973, 125-146;
E. WITTMANN, Natural numbers and groupings, Ed. Studies in Mathematics 6, 1975, 53-75.

(i) Situations d'apprentissage ouverte ou dirigée: Une même situation d'apprentissage peut donner lieu à la formation de groupements différents. Peut-on caractériser une situation d'apprentissage en fonction du nombre de groupements auxquels elle peut donner lieu?

(ii) Processus cognitifs fondamentaux: Piaget prétend que les différents types de groupement classifiés par lui correspondent à des processus cognitifs fondamentaux différents. Peut-on élaborer des situations d'apprentissage déterminées qui donneraient lieu à des processus cognitifs fondamentaux déterminés?

(iii) La complexité de la situation d'apprentissage: Le recours à des concepts comme celui de morphisme entre groupements et de sous-groupements permettra peut-être de définir et de formuler une conception de la complexité des groupements. Pourra-t-on établir aussi, de cette façon, le concept de la complexité d'une situation d'apprentissage?

(iv) La classification des situations d'apprentissage: Les situations d'apprentissage les plus diverses pourraient promouvoir la formation du même type de groupement et provoqueraient donc ainsi le même processus cognitif. Pourrait-on se servir du concept de groupement pour classer les situations d'apprentissage en fonction des processus sognitifs auxquels elles donnent lieu?

(v) Situation d'apprentissage et formation de concepts: Quel rapport y a-t-il entre la formation de groupements et la formation de concepts de la mathématique? Pourrait-on concevoir des situations d'apprentissage, qui favoriseraient la formation de certains groupements, et donc la formation de certains concepts mathématiques?

Ces points et questions retrouvent toute leur pertinence dès qu'on envisage le processus d'apprentissage dans la perspective d'un processus de sturcturation de situations données, ce qui semble particulièrement judicieux dans le cas de la didactique de la mathématique. Voici quelques exemples à cet effet:

III Quelques exemples de matériels d'apprentissage et de groupements correspondants.

III.1 Les parents du cube

Notre premier exemple est choisi dans le domaine de l'enseignement de la géométrie et plus exactement, dans celui de l'étude de solides géométriques. La classe projective des hexaèdres simples et convexes à 8 sommets et 12 arêtes, que nous avons appelés les parents du cube, représente une famille de solides structurables en fonction de plusieurs critères et relativement facile à saisir dans sa totalité. On peut aussi décrire cette classe comme suit:

Paires de faces parallèles

Quadruplets d'arêtes parallèles	0	1	2	3
0	(0,0)	(0,1)		
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	
2		(2,1)	(2,2)	
3				(3,3)

Cet ensemble de blocs contient entre autres:

(i) des prismes hexaèdres

(ii) des parrallèlépipèdes

(iii) des troncs de prismes (héxaèdres)

(iv) des solides droits ou obliques (où cette propriété s'applique)

(v) divers types de quadrilatères en tant que faces de solides.

Comme nous étions intéressés à savoir si, comment et jusqu'à quel point les concepts en question pouvaient être élaborés librement, comment et dans quelle mesure les élèves étaient capables après cette initiation, de procéde: à
- des structurations,
- des conceptualisations et
- des formulations

nous avons essayé d'observer des élèves pendant leurs activités d'exploration de cet ensemble de blocs et, par la suite, dans une situations d'apprentissage aussi libre que possible.

Avant d'avoir recours au concept de groupement dans sa formulation nouvelle, nous avons décrit les résultats de nos observations par un profil d'expérimentation dont nous donnons un exemple en annexe.

Ce résultat peut être décrit beaucoup plus précisément à l'aide du concept de groupement.[1] Nous mentionnerons quelques groupements dont les élèves se sont servi pendant leur activités exploratrices, et nous les esquisserons ici sous forme de graphes.

a) <u>Groupement logique de superposition complète de partitions</u>.

avec $E_a = \{0,1,2,3\}$ paires de faces parallèles.

$E_b = \{0,1,2,4,6\}$ parallélogrammes

$E_c = \{0,1,2,3\}$ quadruplets d'arêtes parallèles.

---

1. Pour la formulation de ce concept voir les publications de E. WITTMANN dont nous avons donné les références à la page 7. Nous utilisons ici largement la même terminologie que dans ces articles.

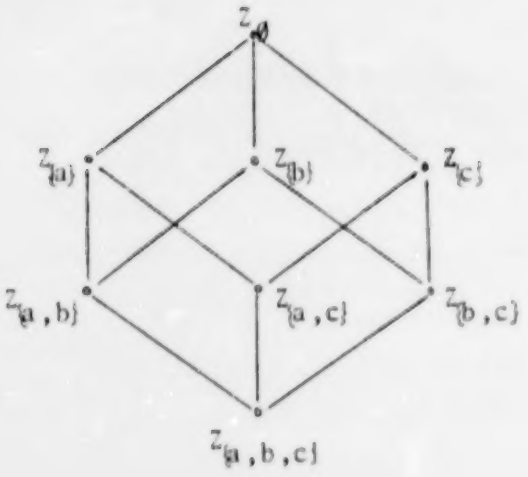


Figure 1

Ici, nous n'avons observé des activités que jusqu'à la superposition de deux partitions. Par contre, nous avons constaté que quelques élèves parvenaient nettement à la superposition complète des partitions à travers des superpositions partielles.

b) Groupement logique des classes d'une partition.

A l'intérieur d'une partition donnée, les élèves ont tenté de ranger les classes selon le degré de perfection des éléments qu'elles contenaient. Nous avons observé par exemple des élèves, qui travaillaient à l'intérieur de $Z_{\{a,c\}}$ dans le cadre du groupement suivant:

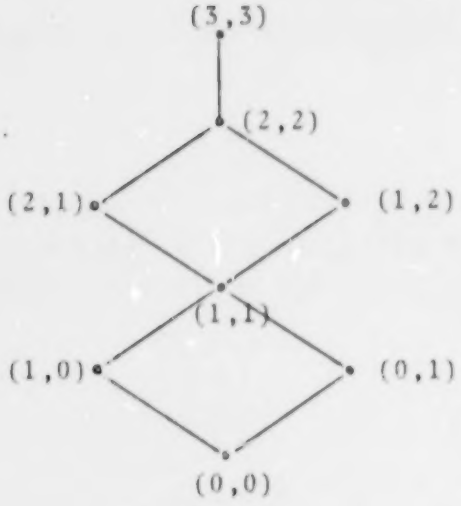


Figure 2

où les paires (p,q) sont définies de façon à ce que $p \in E_a$ et $q \in E_c$.

Nous avons appelé ce type de groupement celui des classes d'une partition. Il a quelques aspects en commun avec les groupements booléens mais en est essentiellement différent par les types de procédés cognitifs impliqués. (La différence réside dans les schèmes opératoires correspondants; nous y reviendrons plus loin).

Le groupement précédant a induit quelques élèves à examiner de plus près les représentants des différentes classes. Au cours de cette recherche ils ont constaté, que la classe (1,1) contient - contrairement aux autres classes - encore deux autres classes de blocs differentes en ce qui concerne leur perfection: des prismes et des non-prismes. Sur cela, ils ont rangé les blocs comme suit:

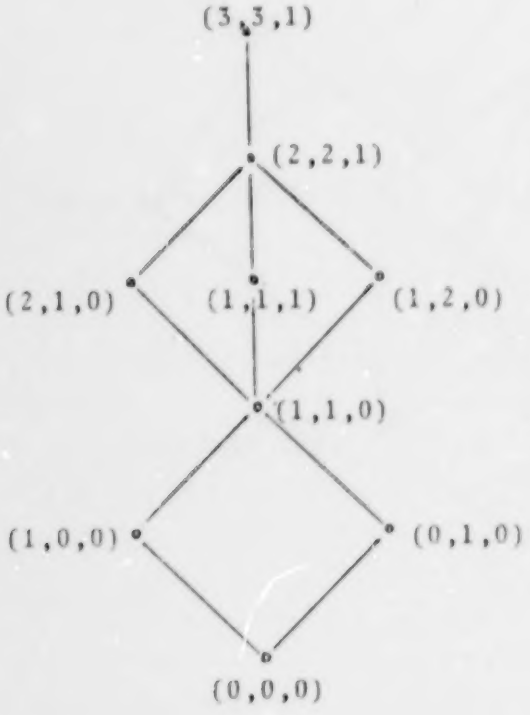


Figure 3

où pour chaque triplet (p,q,r) $p \in E_a$, $q \in E_c$ et $r \in E_d$ où

$E_d = \{$prisme (1), non-prisme (0)$\}$

Les enfants ont formulés: Tout prisme hexaèdre a autant de paires de faces parallèles qu'il a de quadruplets d'arêtes parallèles, etc.

Durant la manipulation du matériel nous avons remarqué une tendance des élèves à composer des blocs nouveaux à partir de deux ou plusieurs blocs donnés. La question qui est revenue constamment était celle de savoir si on pouvait composer un bloc plus parfaitavec deux blocs moins parfaits. Dans le langage des groupements, cela fait appel à un besoin de manipulation pour exécuter au moins les opérations élémentaires. Nous avons suivi cette suggestion donnée par les élèves pour ce dernier groupement de classes. Nous avons trouvé que cette composition était possible et engendrait le graphe suivant:

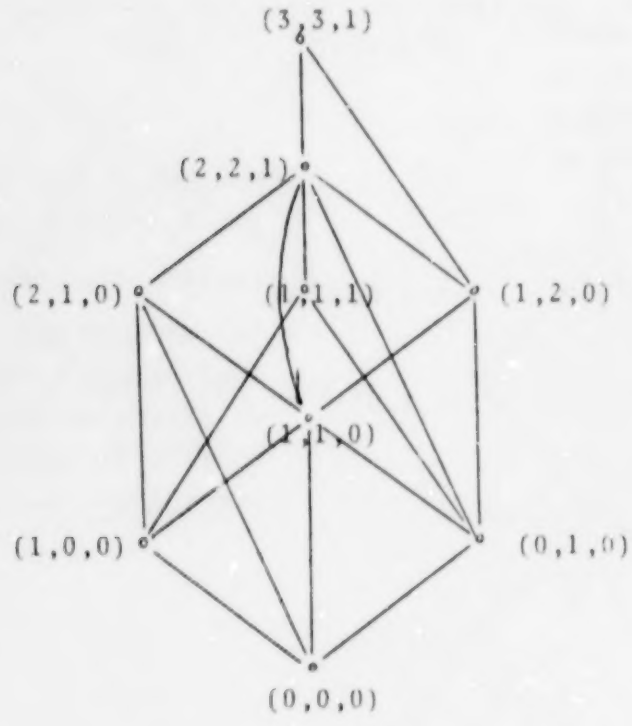


Figure 4

Voici le "graphique minimal" dont la fermeture réflexo-transitive engendre la même structure d'ordre que celle dont la représentation est donnée dans le graphe précédent:

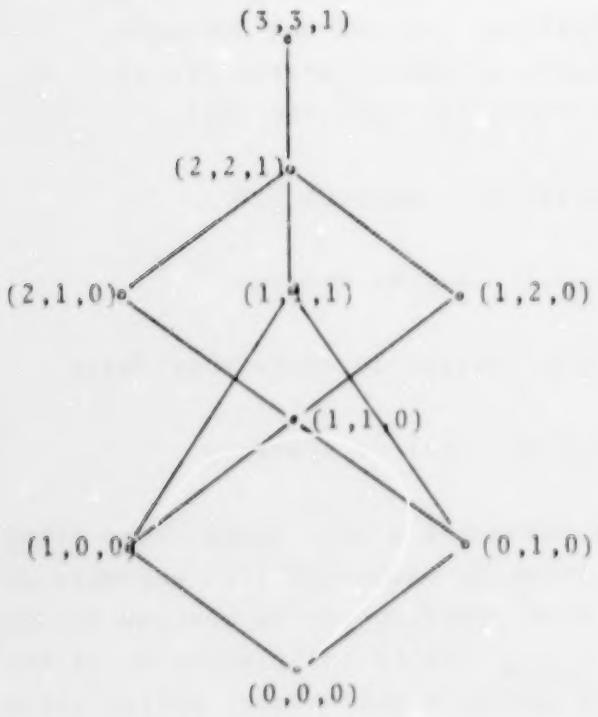


Figure 5

Comme on peut le constater, ce groupement ne constitue plus un groupement en treillis.

c) Groupements booléens et groupements logiques des classes d'une partition.

En expérimentant avec l'ensemble des "parents du cube", les élèves ont manifesté un intérêt prononcé pour une structuration des types de quadrilatères qui constituent des héxaèdres. Ils ont, à partir d'hexaèdre, décalqué sur carton, des quadrilatères, ils les ont découpés, ils les ont classés, sériés, à partir des ensembles de propriétés dont la liste suit:

E_1 = {concave (0), convexe (1)}

E_2 = {0,1,2,4} angles droits

E_3 = {0,1,2} paires de côtés parallèles

E_4 = {0,1,2,4} axes de symétrie

Correspondant à ces ensembles d'attr ibuts, nous avons ensuite rassemblé, sous forme de casse-tête, un ensemble de quadrilatères constitué d'un représentant de chacune des classes de la partition $Z_{\{1,2,3,4\}}$ (voire les figures 6a et 6b)[1]. Nous l'avons employé dans quelques expériences préliminaires avec des enfants et avec des adultes (enseignants). Nous avons constaté que la plupart des personnes procédaient à des subdivisions de l'ensemble en classes de différentes "complexités" Z_S, où $S \subseteq \{1,2,3,4,\}$, pour ésrier ensuite ces classes en fonction de la perfection de leurs éléments.

---

1. L'idée de rassembler sous forme de casse-tête les divers types de quadrilatères a son origine dans l'expérience que les enfants (mais aussi beaucoup d'adultes) sont tentés de les composer à la façon d'un casse-tête durant les premières explorations.

Pour la partition $Z_{\{1,2,3,4\}}$ on obtient le groupement illustré en figure 7, où la relation d'ordre est définie comme suit:

$(p,q,r,s) \trianglelefteq (p',q',r',s') \Longleftrightarrow p \trianglelefteq p'$ et $q \trianglelefteq q'$ et $r \trianglelefteq r'$ et $s \trianglelefteq s'$.

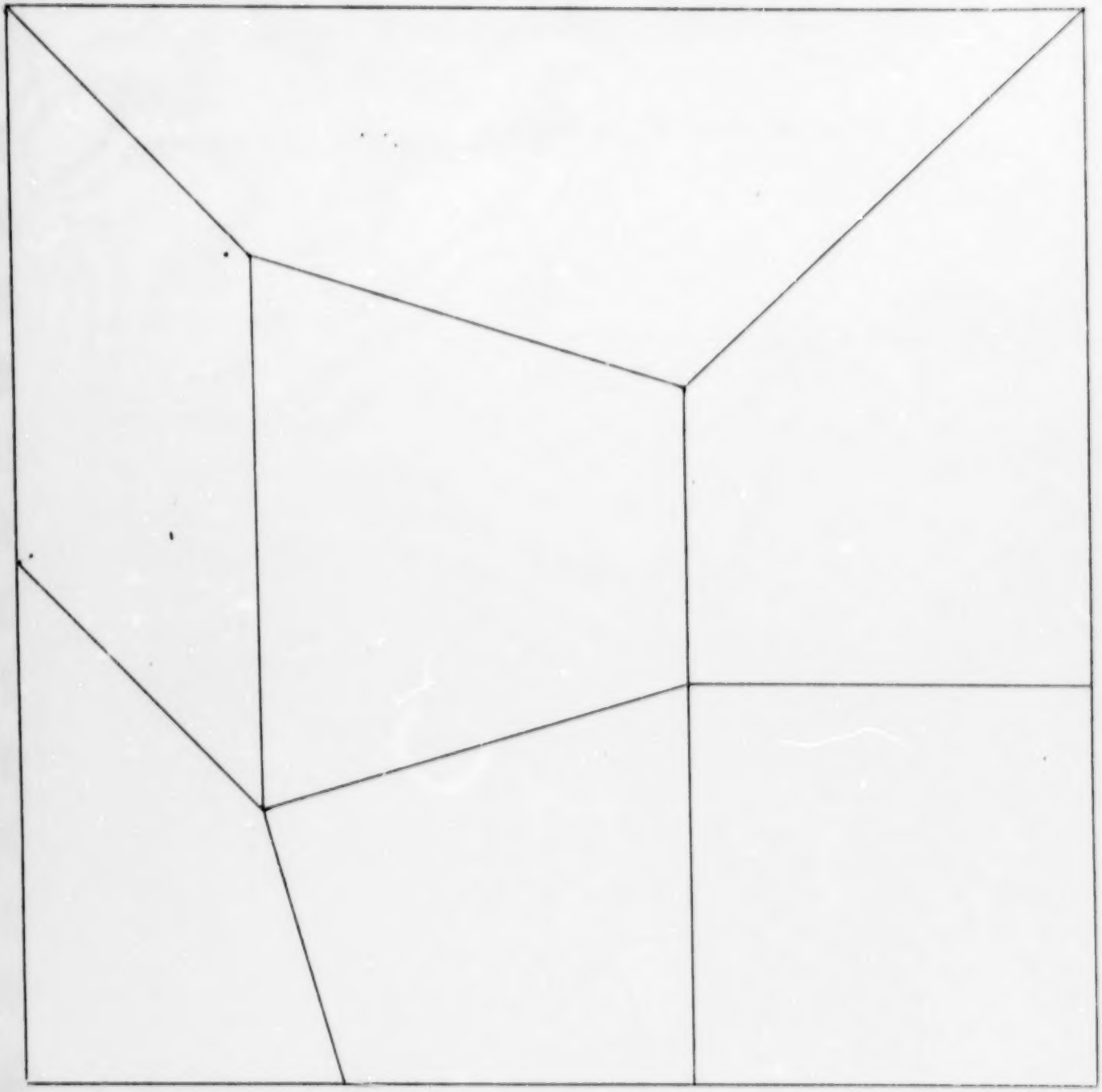


Figure 6 a

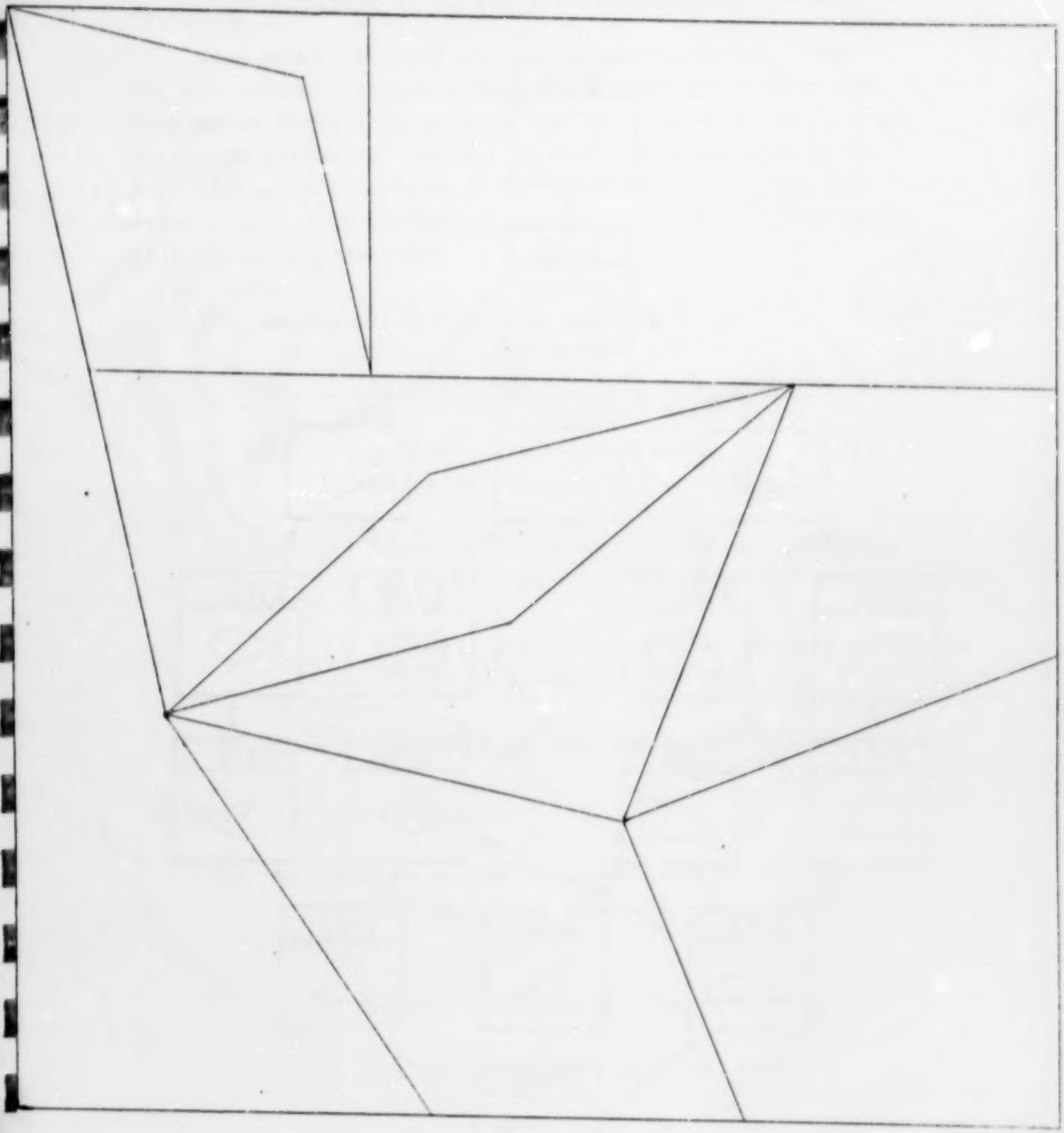


Figure 6 b

Graphe du groupement des classes de la partition $\pi_{\{1,2,3,4\}}$

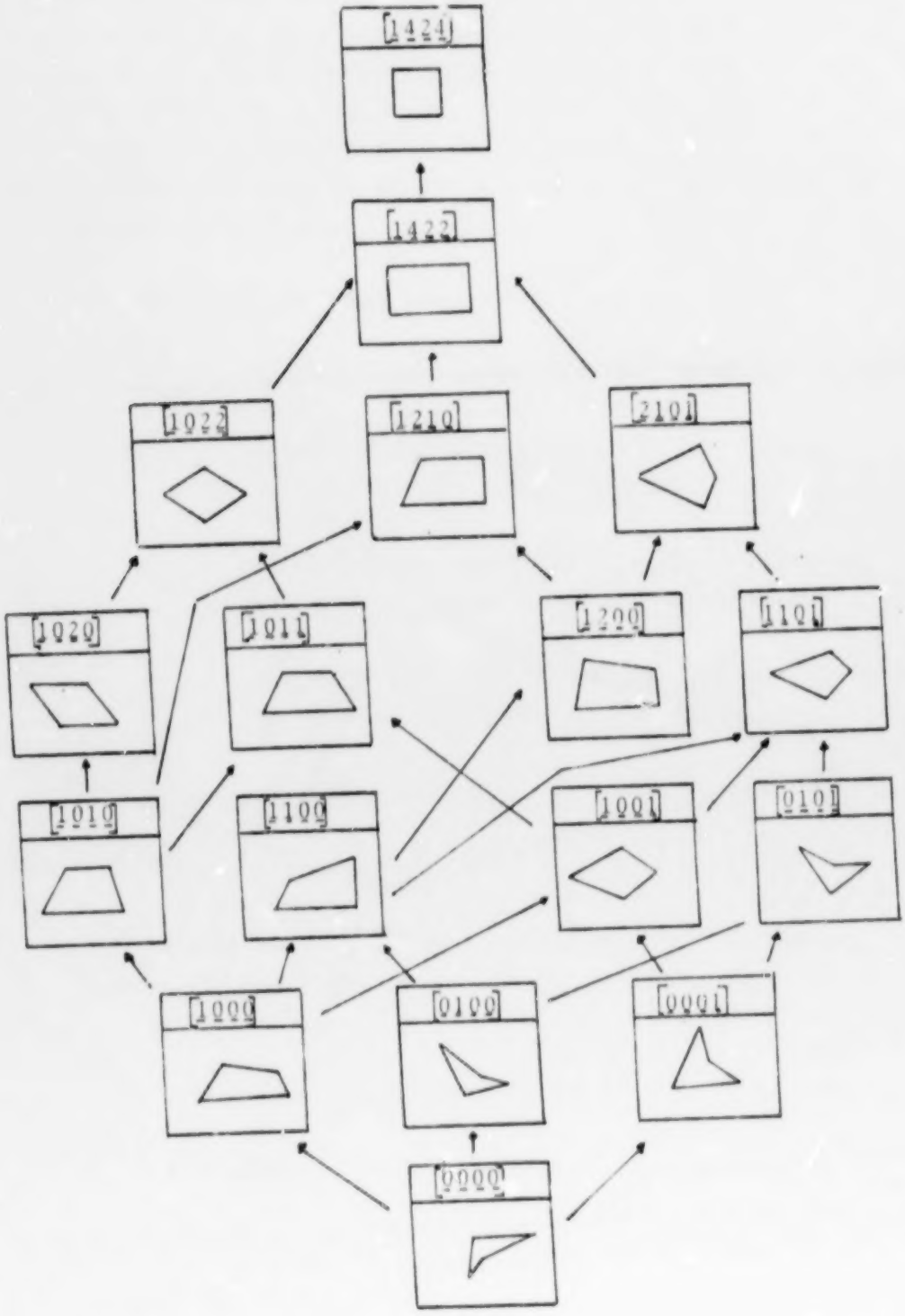


Figure 7

Nous avons remarqué que les sujets tentaient d'isoler des sous-ensembles dans l'ensemble des quadrilatères beaucoup moins souvent et parfois même, seulement après la formation du groupement logique des classes d'une partition. A un niveau correspondant à la partition $Z_{\{1,2,3,4\}}$, nous avons complété ce procédé de structuration qu'avaient entrepris quelques personnes:

(i) Diagramme de VENN pour les ensembles

C : ensemble des quadrilatères convexes: (1,0,0,0)

D_1 : ensemble des quadrilatères, qui ont au moins un angle droit: (0,1,0,0)

P_1 : ensemble des quadrilatères qui possèdent au moins 1 paire de côtés parallèles: (0,0,1,0)

S_1 : ensemble des quadrilatères, qui ont au moins un axe de symétrie: (0,0,0,1)

dans l'ensemble Q de tous les quadrilatères (0,0,0,0).

(Voir la figure 8, page 22).

(ii) Dessin d'un graphe qui symbolise la relation d'inclusion de ces ensembles et leurs intersections:

- en symboles d'ensembles (figure 9, page 23)

- en code de chiffres (figure 10, page 24).

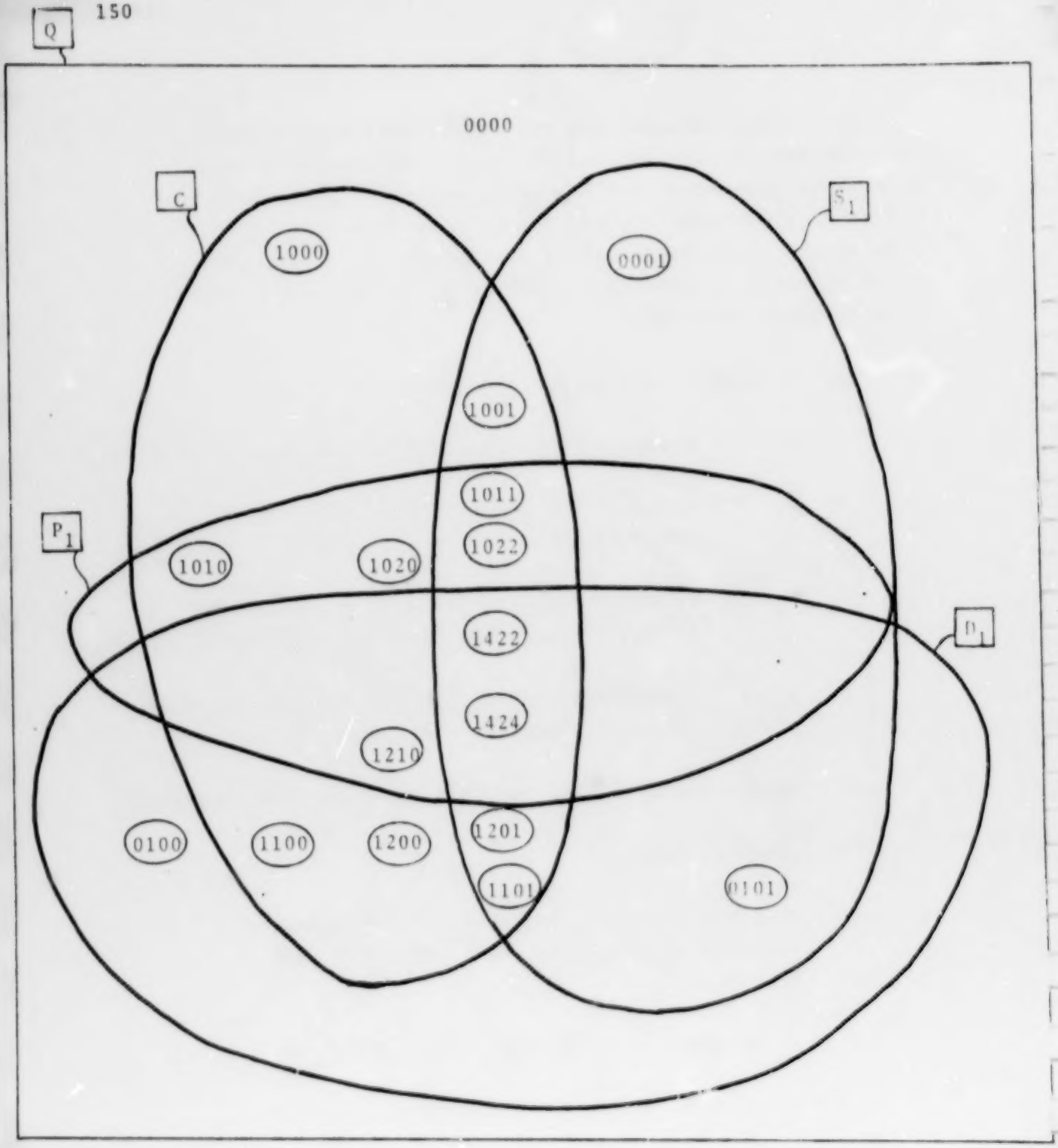

150
Q
0000
C
S_1
1000
0001
1001
1011
P_1
1022
1010
1020
1422
D_1
1424
1210
1201
0100
1100
1200
1101
0101

Figure 8

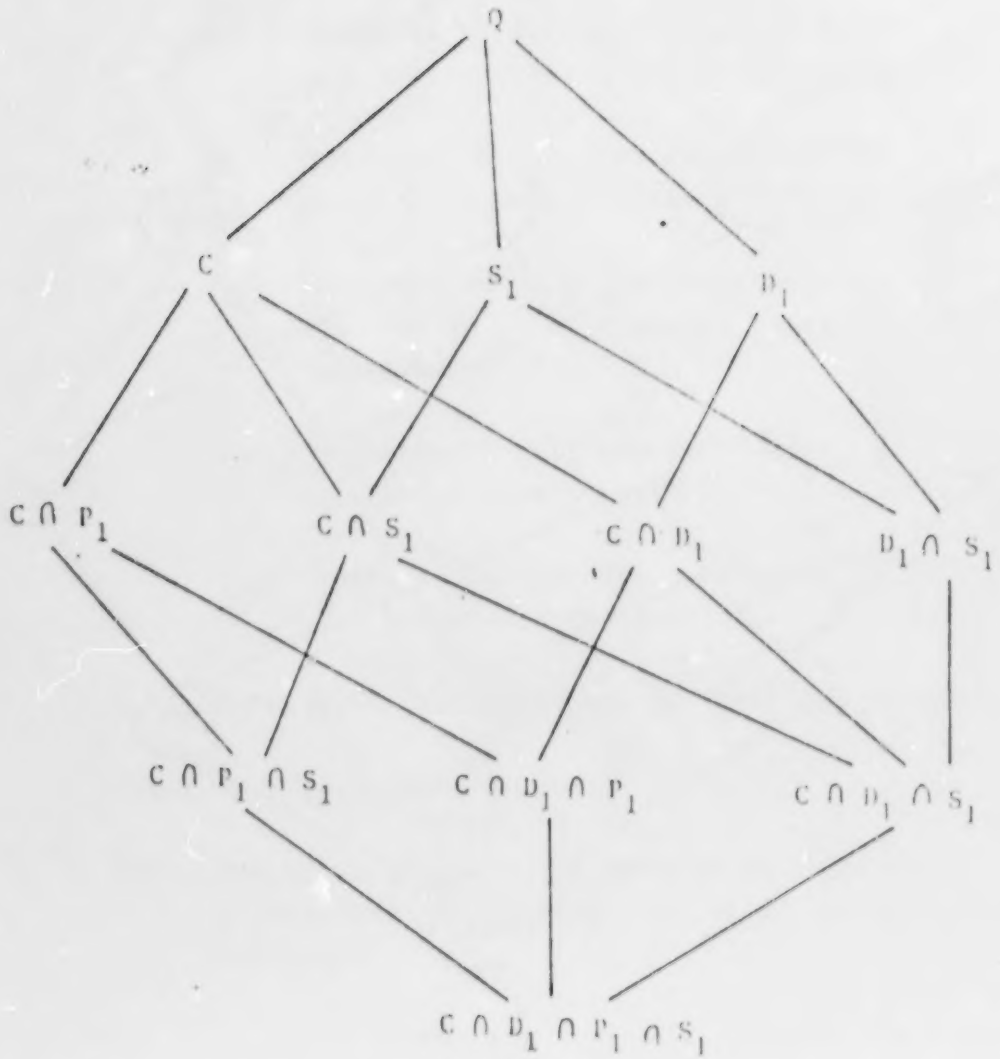

Q
C
S_1
D_1
$C \cap P_1$
$C \cap S_1$
$C \cap D_1$
$D_1 \cap S_1$
$C \cap P_1 \cap S_1$
$C \cap D_1 \cap P_1$
$C \cap D_1 \cap S_1$
$C \cap D_1 \cap P_1 \cap S_1$

Figure 9

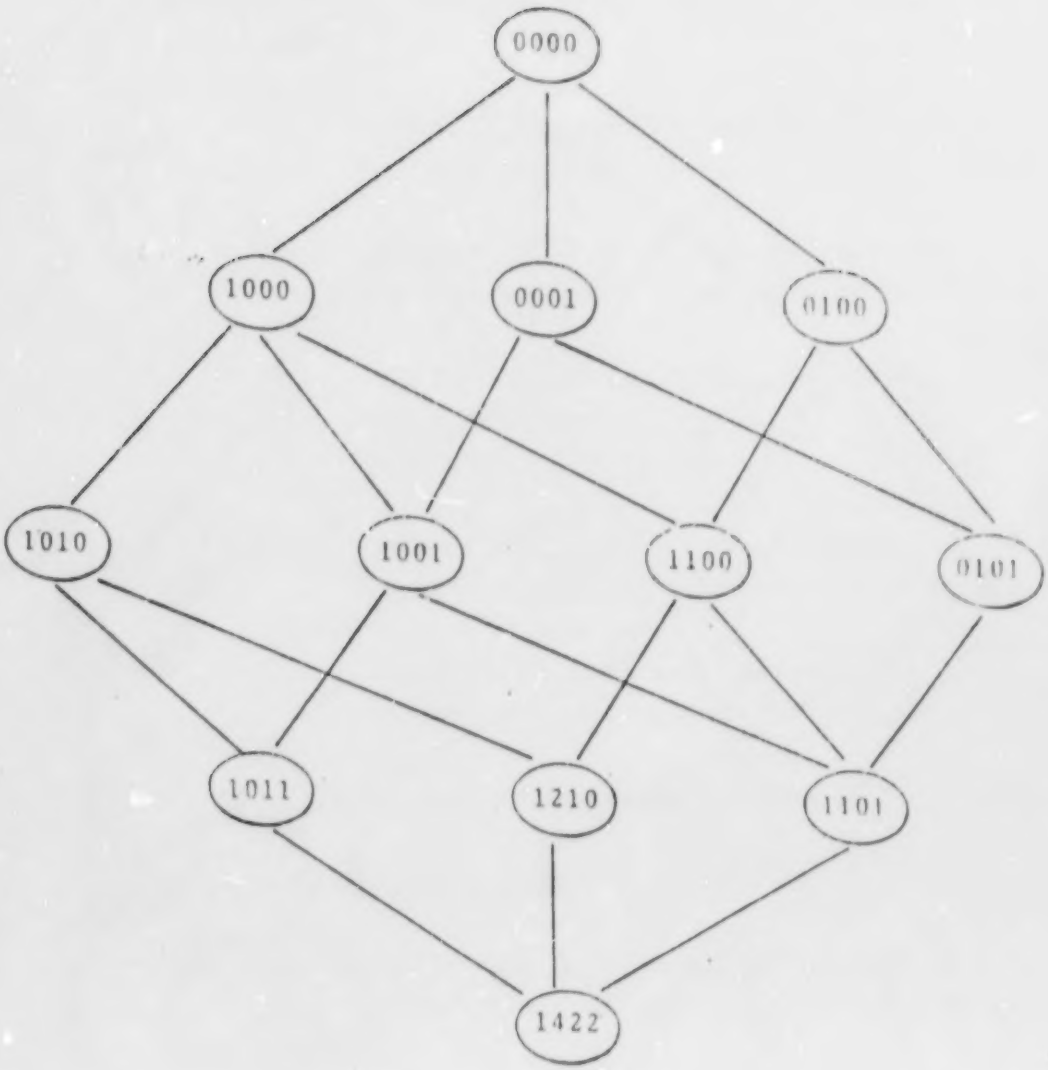


Figure 10

(iii) Identification d'autres sous-ensembles comme:

D_2 : ensemble de tous les quadrilatères, qui ont au moins 2 angles droits: (1,2,0,0)

D_4 : ensemble de tous les quadrilatères, qui ont au moins 4 angles droits: (1,4,2,2)

P_2 : ensemble de tous les quadrilatères, qui ont au moins 2 paires de côtés parallèles: (1,0,2,0)

S_2 : ensemble de tous les rectangles, qûi ont 2 axes de symétrie: (1,0,2,2)

S_4 : ensemble de tous les rectangles, qui ont 4 axes de symétrie: (1,4,2,4)

et la construction du diagramme de VENN correspondant.

(Voir la figure 11, page 26).

(iv) Dessin du graphe qui symbolise la relation d'inclusion de ces ensembles et de leurs intersections:

- en symboles d'ensembles (figure 12) (page 27)
- en code de chiffres (figure 13) (page 28).

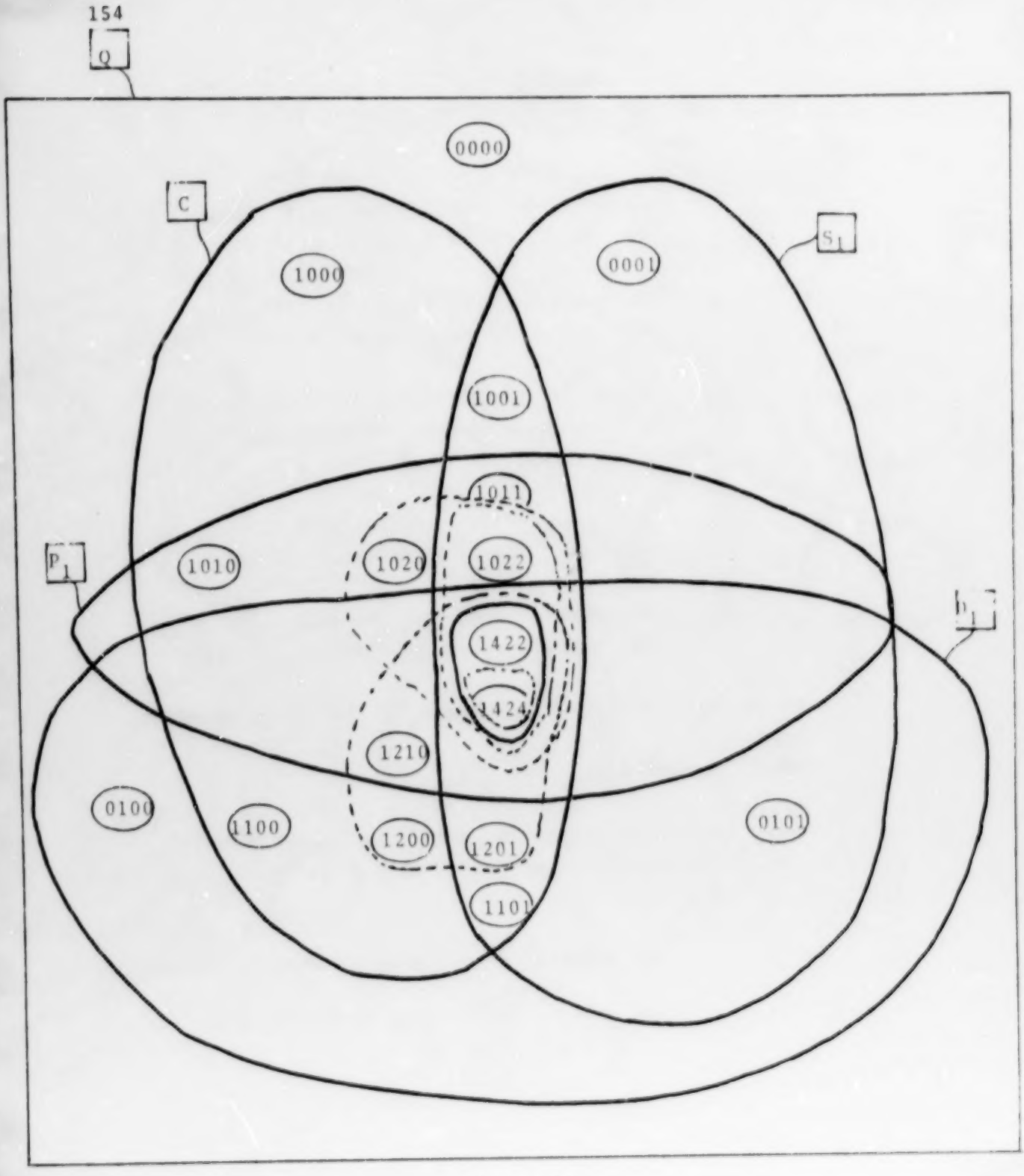

154
Q
0000
C
S_1
1000
0001
1001
1011
P_1
1010
1020
1022
b_1
1422
1424
1210
0100
1100
1200
1201
0101
1101

Figure 11

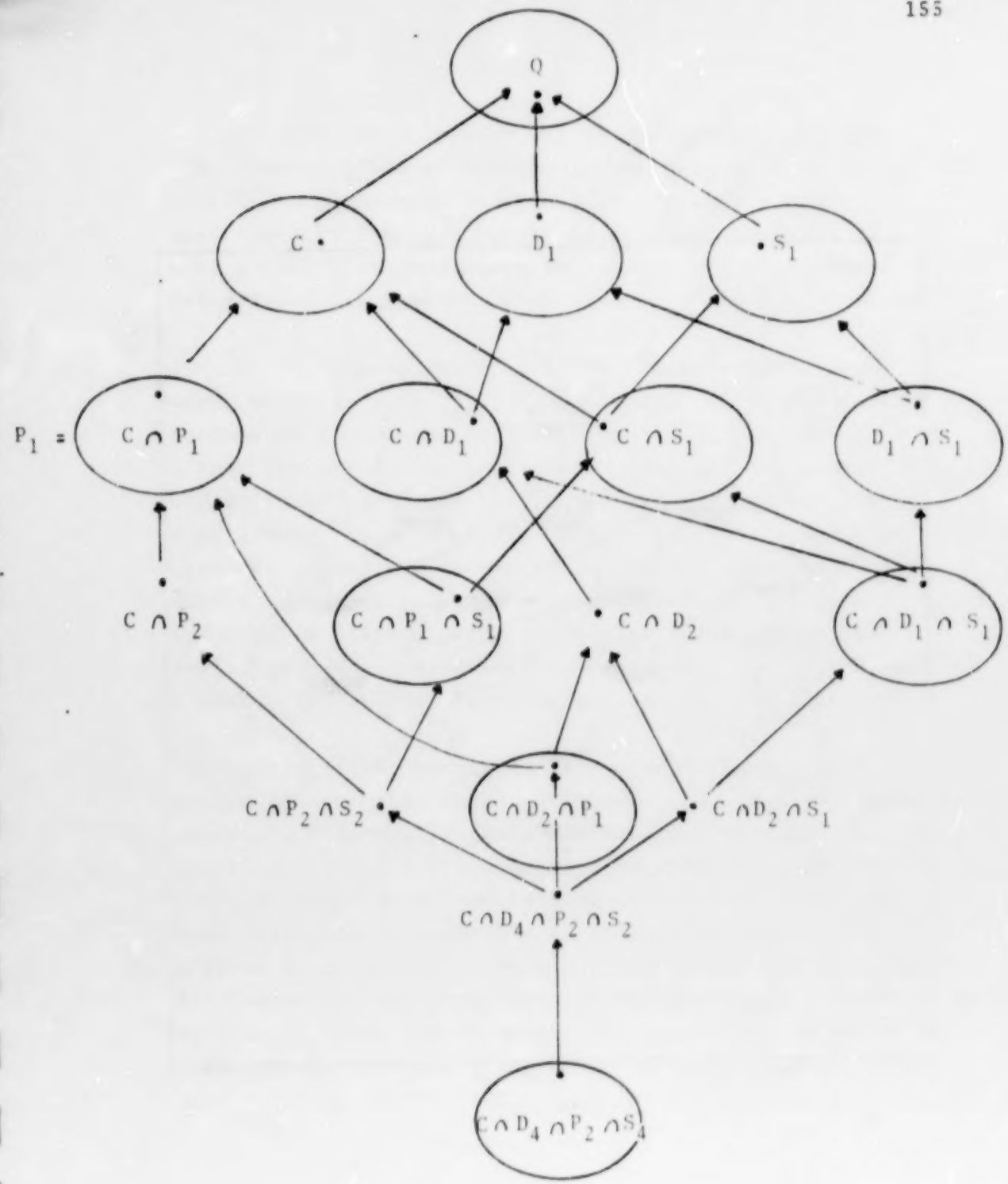

Q
C
D_1
S_1
P_1 = C ∩ P_1
C ∩ D_1
C ∩ S_1
D_1 ∩ S_1
C ∩ P_2
C ∩ P_1 ∩ S_1
C ∩ D_2
C ∩ D_1 ∩ S_1
C ∩ P_2 ∩ S_2
C ∩ D_2 ∩ P_1
C ∩ D_2 ∩ S_1
C ∩ D_4 ∩ P_2 ∩ S_2
C ∩ D_4 ∩ P_2 ∩ S_4

Figure 12

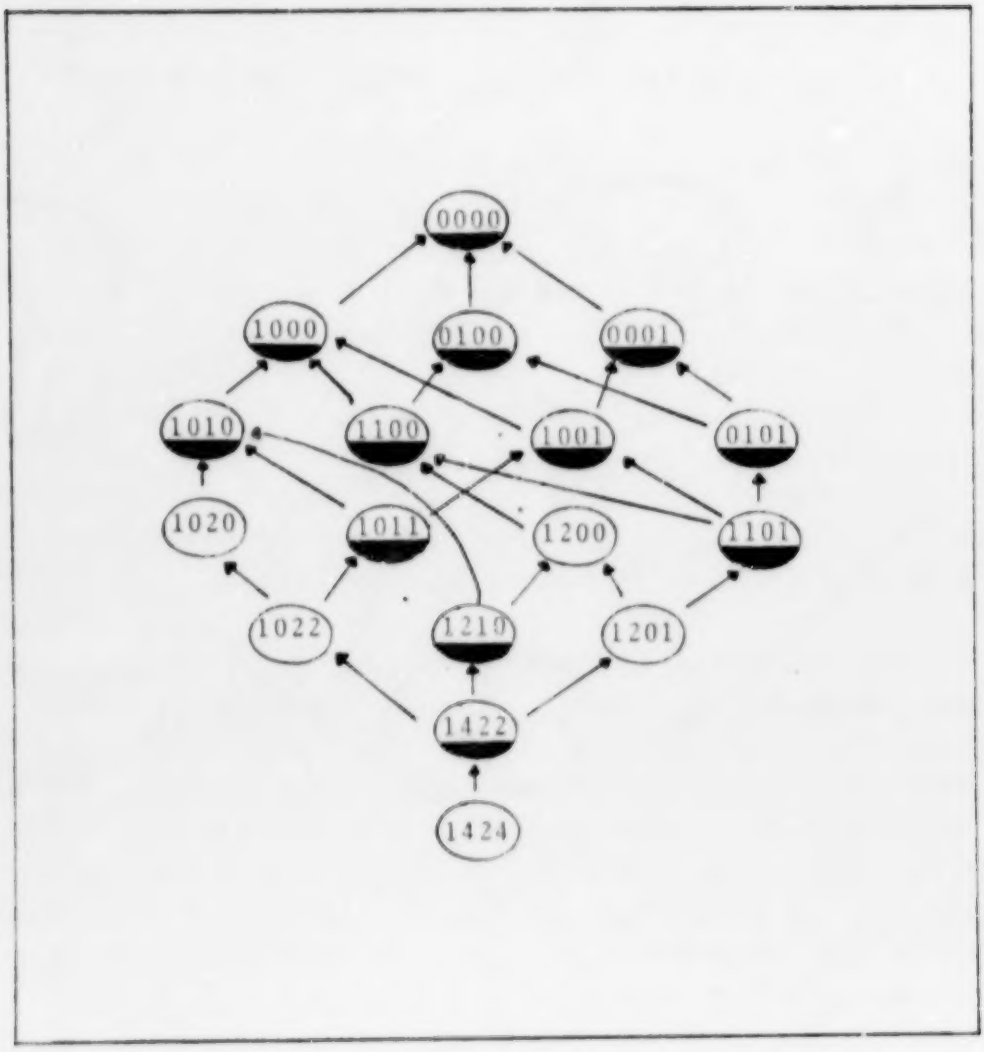

0000
1000
0100
0001
1010
1100
1001
0101
1020
1011
1200
1101
1022
1210
1201
1422
1424

Figure 13

Ce groupement logique des sous-ensembles indiqués précédemment n'est évidemment qu'une partie de ce qu'on appelle le groupement booléen pour l'ensemble Q des quadrilatères donnés. Est-ce un sous-groupement? La même question se pose quand on compare les groupements des graphes des figures 10 et 13.

Si on compare enfin le graphe du groupement logique des classes de $Z_{\{1,2,3,4\}}$ (figure 7) avec le graphe correspondant du groupement booléen (figure 13), on constate l'isomorphisme des deux graphes. Pourtant les processus cognitifs qui sous-tendent la représentation dans les deux graphes isomorphes sont assez différents: dans un cas, les objets représentent des classes d'une partition, dans l'autre, ce sont des sous-ensembles de l'ensemble universel Q; dans un cas, les flèches représentent des perfectionnements élémentaires possibles, tandis que dans l'autre, les flèches représentent la relation d'inclusion.

Cette différence peut avoir une pertinence pour la genèse de concepts: Dans le premier cas, le carré apparaît comme une figure différente du rectangle mais plus parfait que celui-ci, tandis que dans le deuxième cas, le carré se présente comme un rectangle particulier. La même chose peut être dite du rectangle et du parallélogramme, du trapèze et du parallélogramme, etc. Est-ce que ces groupements différents peuvent expliquer les difficultés qu'on rencontre lors de la formation de concepts? Est-ce que la formation relativement rare des groupements booléens suggère un certain degré de difficulté?

Voilà un exemple de quelques questions qui surgissent lors de l'élaboration de telles situations d'apprentissage à l'aide du concept de groupement.

d) Groupements infralogiques.

Le casse-tête que nous avons composé avec l'ensemble des quadrilatères nous sert surtout à des fins de motivation ou pour des tests. (Le nombre des élèves qui sont capables de résoudre le casse-tête, est sensiblement plus élevé après des exercices de structuration qu'avant ces mêmes exercices). Il permet évidemment aussi la formation d'un groupement infralogique, lequel, par le rôle qu'il peut jouer dans les processus de structuration, serait intéressant à explorer. A cause de la complexité de ce groupement particulier, nous avons entrepris d'étudier ce type de groupement par des exemples plus simples d'abord.
En voici des échantillons:

- des figures composables avec des triangles équilatéraux,
- des problèmes avec le casse-tête "Tangram",
- la décomposition d'un pentagone régulier en figures partielles, en coupant d'un coin à un autre.

Ces décompositions peuvent se superposer. Cela nous donnera le groupement infra-logique de superposition de toutes des décompositions (voir la figure 14, page 31). Les différents objets de ce graphique représentent les différentes décompositions possibles, à isométrie près. Chaque flèche indique la superposition (additionnelle) d'une autre décomposition. Chaque décomposition du pentagone est en tant que casse-tête, à son tour, un groupement infra logique. L'affinité de ces groupements avec les groupements logiques ressort clairement.

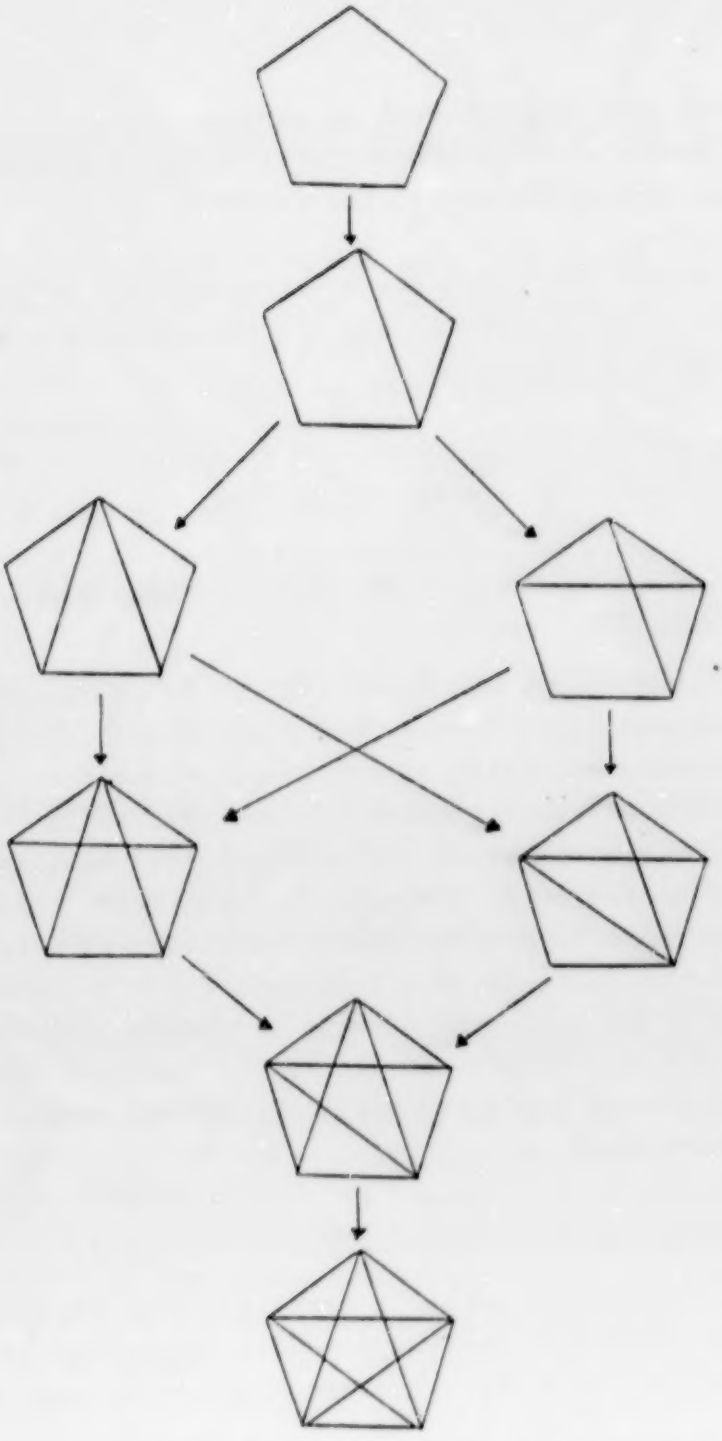


Figure 14

Le problème de l'engendrement de groupements,

- à partir d'un groupement partiel en adjoignant des objets (états) ou des flèches,
  ou bien
- à partir de "fragments de groupements", interprétation inadéquate des flèches, ensemble non-complet d'objets.

Théorème: Tout groupement cartésien est isomorphe à un sous-groupement d'un groupement booléen.

b) Questions et problèmes de nature psychologique et pédagogique.

Dans ce domaine, une explicitation de la classification des groupements selon Piaget (qui d'après lui, correspondent à des processus cognitifs fondamentaux) constituerait un apport très précieux. Ensuite, le problème de la relation entre types de groupements psychologiques et mathématiques serait particulièrement intéressant à élucider. Dans nos travaux actuels, nous sommes plus spécifiquement appliqués à la recherche de critères qui permettraient de reconnaître la formation de tel ou tel type de groupement. Enfin, toutes les questions qui concernent le rapport entre la formation de groupements et celle de concepts mathématique, sont d'un intérêt primordial.

c) Questions et problèmes de nature pratique.

A ce sujet, tout ce qui a trait à l application des réflexions théoriques précédentes à la conception et à l'analyse de situations d'apprentissage nous intéressent vivement.

IV. Quelques problèmes qui se dégagent de ces analyses préliminaires.

La liste de ces exemples peut s'allonger ad libitum. J'espère toutefois, par ces indications, avoir éclairci un peu les réflexions théoriques et avoir démontré que le concept de groupement peut jouer un rôle important dans le cadre d'une telle élaboration de situations d'apprentissage. Pour conclure, j'aimerais revenir sur quelques questions qui se sont posées à nous au cours de cette première exploration, et dont la réponse au moins partielle revêt une importance sensible pour la progression de ces travaux.

Aux fins de la systématisation, nous divisons cette liste de question en trois parties:

a - Questions et problèmes de nature mathématique
b - Questions et problèmes de nature psychologique et pédagogique
c - Questions et problèmes de nature pratique.

a) Questions et problèmes de nature mathématique.

Dans le domaine purement mathématique nous sommes intéressés par toutes les questions relatives à une théorie des groupements dans le langage des catégories. Nous cherchons tout particulièrement des définitions claires de morphismes entre des groupements, des groupements partiels etc, ainsi qu'une classification mathématique (types) des groupements, et l'indication de modèles à pertinence didactique. (Exemple: Est-ce qu'il existe des modèles didactiquement pertinents pour les groupements non-cartésiens?)

Et plus particulièrement:

- La création de situations d'apprentissage ouvertes ou contrôlées

- La conception de situations d'apprentissage qui favorisent la formation de tel ou tel groupement particulier

- La graduation des situations d'apprentissage selon leur degré de complexité

- L'importance et l'application de la possibilité de manipuler les opérations d'un groupement

- Les situations d'apprentissage qui ont le même degré de complexité mais qui varient en ce qui concerne leur degré de difficulté (ex. Groupement booléen et groupement de classes)

- Les groupements et la formulation d'hypothèses mathématiques (ex. Un quadrilatère qui a au moins 1 paire de côtés parallèles, est nécessairement convexe etc.)

- Les groupements et la description d'objets mathématiques (ex. Le carré comme (1, 4, 2, 4) ou comme (-, -, -, 4)

Nous sommes bien conscients qu'aucun de ces trois aspects qui nous a servi pour subdiviser la liste de nos questions et problèmes, ne saurait être traité isoléement à longue échéance. Ces trois aspects sont interreliés, interdépendants et s'éclaircissent réciproquement. Le partage en trois aspects peut toutefois être utile aux fins de l'analyse et aux fins de la répartition du travail. Nous nous intéressons surtout aux travaux de recherche d'aspect pratique, qui constituent le terrain nourricier de nos travaux plus théoriques, en plus de présenter une incidence directe sur l'enseignement de la mathématique. Ces travaux pourront ultérieurement servir à la vérification et à l'évaluation de modèles et de théories dont ils relèvent.